Elagage d'arbres continus

Romain Abraham - Jean-François Delmas

Processus de Galton-Watson

Soit ν une loi de $\mathbb{N}$.
$(Z_n^{(n_0)})_{n\in\mathbb{N}}$ chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par

$$Z_0^{(n_0)} = n_0$$

$$Z_1^{(n_0)} = \sum_{k=1}^{n_0} \xi_k$$

où les variables ξ_k sont i.i.d. de loi ν.

Processus de Galton-Watson

Soit ν une loi de $\mathbb{N}$.
$(Z_n^{(n_0)})_{n\in\mathbb{N}}$ chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par

$$Z_0^{(n_0)} = n_0$$

$$Z_1^{(n_0)} = \sum_{k=1}^{n_0} \xi_k$$

où les variables ξ_k sont i.i.d. de loi ν.

Propriété de branchement :

$$(Z_n^{(n_0+n_1)}, n \in \mathbb{N}) \stackrel{(d)}{=} (Z_n^{(n_0)} + \widetilde{Z}_n^{(n_1)}, n \in \mathbb{N}).$$

Processus de branchement continu

Définition : *Un processus de Markov* $(Y_t^x, t \geq 0)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ *est un processus de branchement continu (CB) si*

$$(Y_t^{x+x'}, t \geq 0) \stackrel{(d)}{=} (Y_t^x + \widetilde{Y}_t^{x'}, t \geq 0).$$

Processus de branchement continu

Définition : *Un processus de Markov* $(Y_t^x, t \geq 0)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ *est un processus de branchement continu (CB) si*

$$(Y_t^{x+x'}, t \geq 0) \overset{(d)}{=} (Y_t^x + \widetilde{Y}_t^{x'}, t \geq 0).$$

Exemple : la diffusion de Feller (i.e. le carré de Bessel de dimension 0), unique solution de

$$dY_t = \sqrt{2\beta Y_t}dB_t.$$

Approximation des CB

Si ν est une probabilité d'espérance 1 et de variance finie σ^2, alors

$$\left(\frac{1}{n}Z^{(n)}_{[nt]}, t \geq 0\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (Y_t, t \geq 0)$$

où Y est une diffusion de Feller avec $\beta = \frac{1}{2}\sigma^2$.

Approximation des CB

Si ν est une probabilité d'espérance 1 et de variance finie σ^2, alors

$$\left(\frac{1}{n} Z^{(n)}_{[nt]}, t \geq 0\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (Y_t, t \geq 0)$$

où Y est une diffusion de Feller avec $\beta = \frac{1}{2}\sigma^2$.

Plus généralement, tout CB peut s'obtenir comme limite d'une suite de Galton-Watson renormalisée.

(Lamperti 1967).

Mécanisme de branchement

La loi d'un CB est caractérisée par une fonction ψ (appelée mécanisme de branchement) de la forme

$$\psi(u) = \alpha u + \beta u^2 + \int_{(0,+\infty)} \pi(dr)\left(e^{-ru} - 1 + ru\right)$$

avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda Y_t^x}\right] = e^{-x u_t(\lambda)}$$

avec u_t unique solution positive de

$$u_t(\lambda) + \int_0^t \psi\big(u_s(\lambda)\big)ds = \lambda.$$

Interprétation des coefficients

- $\psi(\lambda) = \alpha\lambda$. $Y_t = Y_0 e^{-\alpha t}$.
- $\psi(\lambda) = \beta\lambda^2$. Diffusion de Feller.
- π correspond aux sauts de Y.

Interprétation des coefficients

- $\psi(\lambda) = \alpha\lambda$. $Y_t = Y_0 e^{-\alpha t}$.
- $\psi(\lambda) = \beta\lambda^2$. Diffusion de Feller.
- π correspond aux sauts de Y.

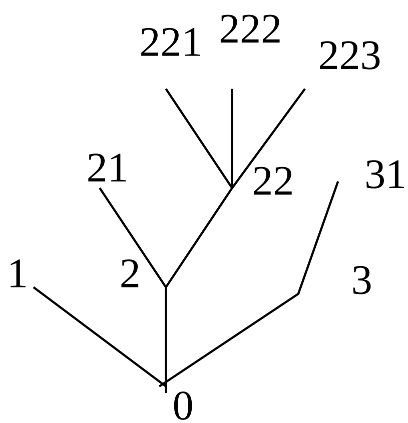
On suppose dans la suite que

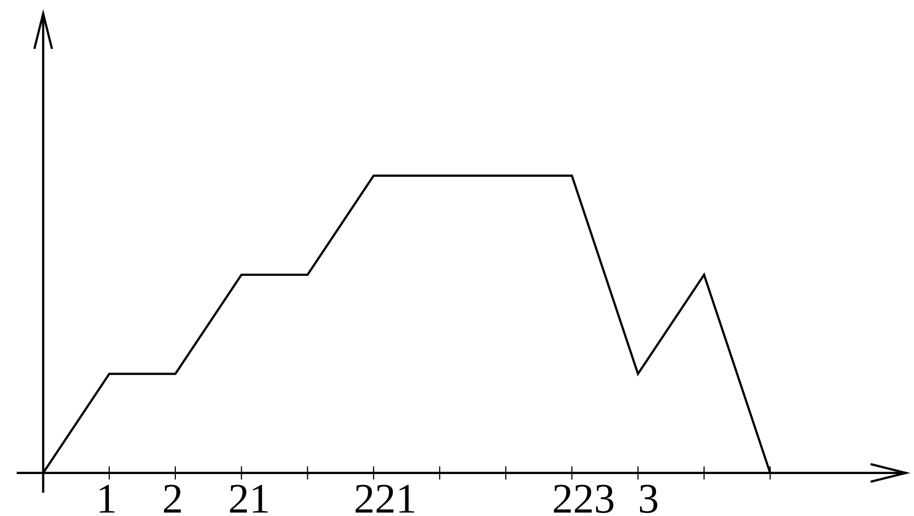
$$\mathbb{E}[Y_t^x] \leq x$$

i.e. le CB est critique ou sous-critique. Dans ce cas, il y a extinction p.s. de la population.

Processus des hauteurs

Arbre fini $\longleftrightarrow$ Processus des hauteurs





Généalogie des CB

Le Gall - Le Jan (1998).
Soit ψ un mécanisme de branchement, X un processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ.

Il existe un processus $(H_t, t \geq 0)$ (construit comme un temps local associé à X) qui est le processus des hauteurs associé à un CB de mécanisme de branchement ψ :

$$\int_0^{+\infty} da\, h(a) Y_a^r = \int_0^{\tau_r} ds\, h(H_s)$$

où $\tau_r = \inf\{t, I_t = -r\}$.

Description de l'arbre

Description de l'arbre grâce à un processus à valeurs mesures $(\kappa_t, t \geq 0)$ défini par

$$\kappa_t(da) = 2\beta \mathbf{1}_{[0,H_t]}(a)da + \sum_{s \leq t, X_{s-} < I_t^s} (X_s - X_{s-})\delta_{H_s}(da)$$

où

$$I_t^s = \inf_{s \leq r \leq t} X_r.$$

Description de l'arbre

Description de l'arbre grâce à un processus à valeurs mesures $(\kappa_t, t \geq 0)$ défini par

$$\kappa_t(da) = 2\beta \mathbf{1}_{[0,H_t]}(a)da + \sum_{s \leq t, X_{s-} < I_t^s} (X_s - X_{s-})\delta_{H_s}(da)$$

où

$$I_t^s = \inf_{s \leq r \leq t} X_r.$$

Les sous-arbres se branchent sur κ_t selon une mesure de Poisson d'intensité $\kappa_t(da)N_a(dY)$.

Elagage de l’arbre

On suppose $\beta = 0$. On fixe $\theta > 0$.

On marque chaque saut Δ_i du Lévy X (i.e. chaque noeud de l’arbre) avec probabilité $1 - e^{-\theta \Delta_i}$.
On note m_t la mesure constituée des masses marquées de κ_t.

On coupe l’arbre suivant les marques et on considère le sous-arbre contenant la racine.

Elagage de l'arbre

On suppose $\beta = 0$. On fixe $\theta > 0$.

On marque chaque saut Δ_i du Lévy X (i.e. chaque noeud de l'arbre) avec probabilité $1 - e^{-\theta\Delta_i}$.
On note m_t la mesure constituée des masses marquées de κ_t.

On coupe l'arbre suivant les marques et on considère le sous-arbre contenant la racine.

Formellement, on pose

$$A_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{m_s=0\}ds} \qquad \text{puis} \qquad C_t = \inf\{s \geq 0, A_s > t\}.$$

Enfin, on pose

$$\widetilde{\kappa}_t = \kappa_{C_t}.$$

Loi de l'arbre élagué

Théorème 0 *(Abraham-Delmas, PTRF 2007)*
La loi de l'arbre élagué est celle d'un arbre de Lévy de mécanisme de branchement

$$\psi^{(\theta)}(\lambda) := \psi(\lambda+\theta) - \psi(\theta).$$

On a

$$\pi^{(\theta)}(d\ell) = e^{-\theta\ell}\pi(d\ell)$$
$$\alpha^{(\theta)} = \alpha + \int_{(0,+\infty)} (1-e^{-\theta\ell})\ell\pi(d\ell).$$

Mutations

Processus de Galton-Watson : chaque individu mute à taux θ.
Les mutations changent le type de l'individu mais pas sa loi de reproduction.

Mutations

Processus de Galton-Watson : chaque individu mute à taux θ.
Les mutations changent le type de l'individu mais pas sa loi de reproduction.

CB : mutation = processus d'immigration à taux proportionnel à la taille de la population.

Mutations

Processus de Galton-Watson : chaque individu mute à taux θ.
Les mutations changent le type de l'individu mais pas sa loi de reproduction.

CB : mutation = processus d'immigration à taux proportionnel à la taille de la population.

Question : probabilité pour que le dernier individu survivant n'ait pas muté ?

Décomposition de Williams

On note $\tau_Y = H_{max}$ le temps d'extinction du CB Y.

Théorème 1 *(Abraham-Delmas, Preprint)*

- $\mathbb{P}_x(\tau_Y < t) = e^{-xc(t)}$ *où* $c(t)$ *vérifie* $\displaystyle\int_{c(t)}^{\infty} \frac{dv}{\psi(v)} = t$.

Décomposition de Williams

On note $\tau_Y = H_{max}$ le temps d'extinction du CB Y.

Théorème 1 *(Abraham-Delmas, Preprint)*

- $\mathbb{P}_x(\tau_Y < t) = e^{-xc(t)}$ *où* $c(t)$ *vérifie* $\displaystyle\int_{c(t)}^{\infty} \frac{dv}{\psi(v)} = t$*.*
- *Conditionnellement à* $\tau_Y = m$*,*

$$\kappa_{max}(dt) = \sum_{i=I} \ell_i \delta_{t_i}(dt) + 2\beta \mathbf{1}_{[0,m)}(t)dt$$

où $\displaystyle\sum_{i\in I} \delta_{(\ell_i,t_i)}(d\ell, dt)$ *est une mesure de Poisson d'intensité*

$$\mathbf{1}_{[0,m)}(t)e^{-\ell c(m-t)}\ell\pi(d\ell)dt.$$

Décomposition de Williams (suite)

- Les sous arbres issus de cette branche sont distribués selon une mesure de Poisson d'intensité

$$\kappa_{max}(dt) N_t[dY, \mathbf{1}_{\tau_Y \le m}].$$

Extinction sans mutation

On note A l'événement : “le dernier individu survivant n'a pas subit de mutation”.
A=pas de mutation sur κ_{max}.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|\tau_Y = m) &= \mathbb{E}[e^{-\theta\sum_{i\in I}\ell_i}] \\ &= \exp -\lambda \int_0^m \phi'(c(t))dt\end{aligned}$$

où

$$\phi = \psi^{(\theta)} - \psi.$$

Mutation générale

On peut construire $(Y_t^0, Y_t)_{t\geq 0}$ telle que

- Y^0 est un CB ψ_0 (population initiale),
- Y est un CB ψ (population totale),
- $Y_t^0 \leq Y_t$

si

- $\beta_0 = \beta$
- $\pi = \pi_0 + \nu$ avec $\displaystyle\int_{(0,+\infty)} \ell\nu(d\ell) < +\infty$,
- $\alpha_{imm} = \alpha_0 - \alpha - \displaystyle\int_{(0,+\infty)} \ell\nu(d\ell) \geq 0$.

Décomposition de Williams

On considère une mesure de Poisson $\sum_{i\in I}\delta_{(\ell_i,t_i,z_i)}(d\ell,dt,dz)$

d'intensité

$$\mathbf{1}_{[0,m)}(e)e^{-\ell c(m-t)}l\left(\pi_0(d\ell)\delta_0(z)+\nu(d\ell)\delta_1(z)\right)dt.$$

- ℓ_i : masses de κ_{max}
- t_i : hauteur de la masse
- z_i : mutations quand $z_i=1$.

Soit $T_1=\min\{t_i, z_i=1\}$.
Soit T_2 une v.a. exponentielle de paramètre α_{imm} (première mutation le long du squelette).

On pose $T_0=min(T_1,T_2)$.

Décomposition de Williams (suite)

Soit $\sum_{j\in J} \delta_{(t_j,Y^{0,j},Y^j)}$ une mesure de Poisson d'intensité

$$\kappa_{max}(dt)N_t((dY^0,dY),\mathbf{1}_{\{\tau_Y\le m\}}).$$

On a alors, conditionnellement à $\tau_Y = m$,

$$(Y^0,Y) \overset{(d)}{=} \sum_{t_j<T_0}(Y^{0,j},Y^j) + \sum_{t_j\ge T_0}(0,Y^j).$$

Probabilité de survie

On a encore

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\tau_{Y^0} = m \,|\, \tau_Y = m) &= \mathbb{P}_x(T_0 = +\infty) \\ &= \exp - \int_0^m \phi'(c(t))dt\end{aligned}$$

où $\phi = \psi_0 - \psi$ est la fonction d'immigration.