Estimées du gradient du noyau de la chaleur et inégalités de Harnack dans des variétés riemanniennes non compactes

Journées de Probabilités 2007
la Londe les Maures

Gradient du noyau de la chaleur

- M variété riemannienne complète non compacte

Gradient du noyau de la chaleur

- M variété riemannienne complète non compacte
- $L = \frac{1}{2}\Delta + Z, \qquad Z = \mathrm{grad}\, V,\ V \in C^2(M)$

Gradient du noyau de la chaleur

- M variété riemannienne complète non compacte
- $L = \frac{1}{2}\Delta + Z, \qquad Z = \mathrm{grad}\, V,\ V \in C^2(M)$
- P_t semi-groupe de Dirichlet associé :

$$P_t f(x) = \mathbb{E}\left[f(X_t(x))1_{\{t<\xi(x)\}}\right]$$

avec $X(x)$ diffusion de générateur L vérifiant $X_0(x) = x$, temps d'explosion $\xi(x)$.

Gradient du noyau de la chaleur

- D domaine C^2 relativement compact de M

Gradient du noyau de la chaleur

- D domaine C^2 relativement compact de M
- P_t^D semi-groupe de Dirichlet associé :

$$P_t^D f(x) = \mathbb{E}\left[f(X_t(x))1_{\{t<\tau(x)\}}\right]$$

avec $\tau(x)$ temps de sortie de D.

[Souplet-Zhang 06] : pour toute $f \in B_b^+$ (fonctions boréliennes bornées positives)

$$\left\|\mathrm{grad}\, P_t^D f(x)\right\| \leq C(x,t) P_t^D f(x)$$

où $C(x,t)$ est une fonction localement bornée sur $D\times]0,\infty[$.

[Souplet-Zhang 06] : pour toute $f \in B_b^+$ (fonctions boréliennes bornées positives)

$$\left\| \mathrm{grad}\, P_t^D f(x) \right\| \leq C(x,t) P_t^D f(x)$$

où $C(x,t)$ est une fonction localement bornée sur $D \times]0,\infty[$.

Conséquence :

[Souplet-Zhang 06] : pour toute $f \in B_b^+$ (fonctions boréliennes bornées positives)

$$\left\| \mathrm{grad}\, P_t^D f(x) \right\| \le C(x,t) P_t^D f(x)$$

où $C(x,t)$ est une fonction localement bornée sur $D \times]0,\infty[$.

Conséquence :
Si $f \in B_b^+$, $t > 0$, $x, y \in D$,

[Souplet-Zhang 06] : pour toute $f \in B_b^+$ (fonctions boréliennes bornées positives)

$$\left\| \mathrm{grad}\, P_t^D f(x) \right\| \leq C(x,t) P_t^D f(x)$$

où $C(x,t)$ est une fonction localement bornée sur $D \times]0,\infty[$.

Conséquence :
Si $f \in B_b^+$, $t > 0$, $x, y \in D$,

$$P_t^D f(x) \leq \tilde{C}(x,y,t) P_t^D f(y)$$

où $\tilde{C}$ est localement bornée sur $D \times D \times]0,\infty[$

Gradient du noyau de la chaleur

But : établir des inégalités analogues dans M

Gradient du noyau de la chaleur

But : établir des inégalités analogues dans M

Remarque : ces inégalités ne sont pas vérifiées en général, par exemple prendre $M = \mathbb{R}^d$ et $L = \frac{1}{2}\Delta$.

Gradient du noyau de la chaleur

Théorème 1 [A-, Thalmaier, Wang]

Gradient du noyau de la chaleur

Théorème 1 [A-, Thalmaier, Wang]
Il existe $F : M \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\forall \delta \in]0,1[$, $x \in M$, $t > 0$, $f \in B_b^+$,

$$\left\| \mathrm{grad}\, P_t^D f(x) \right\| \leq \delta \left[P_t \left(f \log \frac{f}{P_t f(x)} \right) \right](x) + F(x) \left(\frac{1}{\delta t} + 1 \right) P_t f(x).$$

Gradient du noyau de la chaleur

Corollaire 1 [A-, Thalmaier, Wang], inégalité de Harnack

Gradient du noyau de la chaleur

Corollaire 1 [A-, Thalmaier, Wang], inégalité de Harnack
Il existe $C : M \times M \to \mathbb{R}_+$ continue, telle que $\forall \alpha > 1$, $t > 0$, $x, y \in M$, $f \in B_b^+$

$$(P_t f(x))^\alpha \leq P_t f^\alpha(y) \exp\left[\alpha C(x,y)\left(\frac{\alpha\rho^2(x,y)}{(\alpha-1)t} + \rho(x,y)\right)\right]$$

où $\rho(x,y)$ est la distance riemannienne de x à y.

Gradient du noyau de la chaleur

Corollaire 1 [A-, Thalmaier, Wang], inégalité de Harnack
Il existe $C : M \times M \to \mathbb{R}_+$ continue, telle que $\forall \alpha > 1$, $t > 0$, $x, y \in M$, $f \in B_b^+$

$$(P_t f(x))^\alpha \le P_t f^\alpha(y) \exp\left[\alpha C(x,y)\left(\frac{\alpha \rho^2(x,y)}{(\alpha-1)t} + \rho(x,y)\right)\right]$$

où $\rho(x, y)$ est la distance riemannienne de x à y.

Corollaire 2 [A-, Thalmaier, Wang], estimation du noyau de la chaleur $p_t(x, y)$

Gradient du noyau de la chaleur

Corollaire 1 [A-, Thalmaier, Wang], inégalité de Harnack
Il existe $C : M \times M \to \mathbb{R}_+$ continue, telle que $\forall \alpha > 1$, $t > 0$, $x, y \in M$, $f \in B_b^+$

$$(P_t f(x))^\alpha \leq P_t f^\alpha(y) \exp\left[\alpha C(x,y)\left(\frac{\alpha\rho^2(x,y)}{(\alpha-1)t} + \rho(x,y)\right)\right]$$

où $\rho(x,y)$ est la distance riemannienne de x à y.

Corollaire 2 [A-, Thalmaier, Wang], estimation du noyau de la chaleur $p_t(x,y)$
$\forall \delta > 2$, $\exists C_\delta : [0,\infty[\times M \to \mathbb{R}_+$, $\forall x, y \in M,\ t > 0$,

$$p_t(x,y) \leq \frac{\exp\left[\frac{-\rho(x,y)^2}{2\delta t} + C_\delta(t,x) + C_\delta(t,y)\right]}{\sqrt{\mu(B(x,\sqrt{t}))\mu(B(y,\sqrt{t}))}},$$

avec $\mu(dx) = e^{V(x)}\,dx$.

Lemme fondamental

Gradient du noyau de la chaleur

Lemme fondamental

$(E, \mathcal{F}, \tilde{\mu})$ espace mesuré avec $\tilde{\mu}$ bornée

Gradient du noyau de la chaleur

Lemme fondamental
$(E, \mathcal{F}, \tilde{\mu})$ espace mesuré avec $\tilde{\mu}$ bornée
$f \in L^1(\tilde{\mu})$ positive vérifiant $\tilde{\mu}(f) > 0$

Gradient du noyau de la chaleur

Lemme fondamental

$(E, \mathcal{F}, \tilde{\mu})$ espace mesuré avec $\tilde{\mu}$ bornée
$f \in L^1(\tilde{\mu})$ positive vérifiant $\tilde{\mu}(f) > 0$
ψ mesurable telle que $\psi f \in L^1(\tilde{\mu})$.

Gradient du noyau de la chaleur

Lemme fondamental
$(E, \mathcal{F}, \tilde{\mu})$ espace mesuré avec $\tilde{\mu}$ bornée
$f \in L^1(\tilde{\mu})$ positive vérifiant $\tilde{\mu}(f) > 0$
ψ mesurable telle que $\psi f \in L^1(\tilde{\mu})$.
Alors

$$\int_E \psi f \, d\tilde{\mu} \leq \int_E f \log \frac{f}{\tilde{\mu}(f)} \, d\tilde{\mu} + \tilde{\mu}(f) \log \int_E e^{\psi} \, d\tilde{\mu}.$$

Gradient du noyau de la chaleur

Théorème 2 [A-, Hsu, Thalmaier], diffusion horizontale dans l'espace des chemins C^1.

Gradient du noyau de la chaleur

Théorème 2 [A-, Hsu, Thalmaier], diffusion horizontale dans l'espace des chemins C^1.

Soit $u \mapsto \varphi(u)$ un chemin C^1 dans M, défini sur $[0, \infty[$

Gradient du noyau de la chaleur

Théorème 2 [A-, Hsu, Thalmaier], diffusion horizontale dans l'espace des chemins C^1.
Soit $u \mapsto \varphi(u)$ un chemin C^1 dans M, défini sur $[0, \infty[$
Soit X^0 une diffusion de générateur L et de point de départ $\varphi(0)$.

Gradient du noyau de la chaleur

Théorème 2 [A-, Hsu, Thalmaier], diffusion horizontale dans l'espace des chemins C^1.
Soit $u \mapsto \varphi(u)$ un chemin C^1 dans M, défini sur $[0, \infty[$
Soit X^0 une diffusion de générateur L et de point de départ $\varphi(0)$.
Alors il existe une unique famille $u \mapsto (X_t(u))_{t \geq 0}$ de diffusions de générateur L,

Gradient du noyau de la chaleur

Théorème 2 [A-, Hsu, Thalmaier], diffusion horizontale dans l'espace des chemins C^1.
Soit $u \mapsto \varphi(u)$ un chemin C^1 dans M, défini sur $[0, \infty[$
Soit X^0 une diffusion de générateur L et de point de départ $\varphi(0)$.
Alors il existe une unique famille $u \mapsto (X_t(u))_{t \geq 0}$ de diffusions de générateur L, p.s. continue en (t, u) et C^1 en u,

Gradient du noyau de la chaleur

Théorème 2 [A-, Hsu, Thalmaier], diffusion horizontale dans l'espace des chemins C^1.
Soit $u \mapsto \varphi(u)$ un chemin C^1 dans M, défini sur $[0, \infty[$
Soit X^0 une diffusion de générateur L et de point de départ $\varphi(0)$.
Alors il existe une unique famille $u \mapsto (X_t(u))_{t\geq 0}$ de diffusions de générateur L, p.s. continue en (t, u) et C^1 en u, vérifiant
$X(0) = X^0$, $X_0(u) = \varphi(u)$,

Gradient du noyau de la chaleur

Théorème 2 [A-, Hsu, Thalmaier], diffusion horizontale dans l'espace des chemins C^1.
Soit $u \mapsto \varphi(u)$ un chemin C^1 dans M, défini sur $[0, \infty[$
Soit X^0 une diffusion de générateur L et de point de départ $\varphi(0)$.
Alors il existe une unique famille $u \mapsto (X_t(u))_{t \geq 0}$ de diffusions de générateur L, p.s. continue en (t, u) et C^1 en u, vérifiant $X(0) = X^0$, $X_0(u) = \varphi(u)$, et

$$\partial_u X_t(u) = W(X(u))_t(\dot{\varphi}(u)),$$

Gradient du noyau de la chaleur

Théorème 2 [A-, Hsu, Thalmaier], diffusion horizontale dans l'espace des chemins C^1.
Soit $u \mapsto \varphi(u)$ un chemin C^1 dans M, défini sur $[0, \infty[$
Soit X^0 une diffusion de générateur L et de point de départ $\varphi(0)$.
Alors il existe une unique famille $u \mapsto (X_t(u))_{t \geq 0}$ de diffusions de générateur L, p.s. continue en (t, u) et C^1 en u, vérifiant $X(0) = X^0$, $X_0(u) = \varphi(u)$, et

$$\partial_u X_t(u) = W(X(u))_t(\dot{\varphi}(u)),$$

où $W(Y)_t : T_{Y_0}M \to T_{Y_t}M$ est le transport parallèle déformé au-dessus de Y :

$$DW(Y) = \left(-\frac{1}{2}\mathrm{Ric}^\sharp(W(Y)) + \nabla_{W(Y)}Z\right) dt.$$

Gradient du noyau de la chaleur

Théorème 2 [A-, Hsu, Thalmaier], diffusion horizontale dans l'espace des chemins C^1.
Soit $u \mapsto \varphi(u)$ un chemin C^1 dans M, défini sur $[0, \infty[$
Soit X^0 une diffusion de générateur L et de point de départ $\varphi(0)$.
Alors il existe une unique famille $u \mapsto (X_t(u))_{t\geq 0}$ de diffusions de générateur L, p.s. continue en (t, u) et C^1 en u, vérifiant $X(0) = X^0$, $X_0(u) = \varphi(u)$, et

$$\partial_u X_t(u) = W(X(u))_t(\dot{\varphi}(u)),$$

où $W(Y)_t : T_{Y_0}M \to T_{Y_t}M$ est le transport parallèle déformé au-dessus de Y :

$$DW(Y) = \left(-\frac{1}{2}\mathrm{Ric}^\sharp(W(Y)) + \nabla_{W(Y)}Z\right) dt.$$

De plus

$$dX_t(u) = P^{X(\cdot)}_{t,0,u} d_m X^0_t + Z_{X_t(u)}\, dt$$

avec $v \mapsto P^{X(\cdot)}_{t,0,v}$ transport parallèle le long de $v \mapsto X_t(v)$.

Preuve du théorème 1

Preuve du théorème 1

Cas où $\mathrm{Ric} - \mathrm{Hess}\, V$ est borné.

Preuve du théorème 1

Cas où $\mathrm{Ric} - \mathrm{Hess}\, V$ est borné.
Soit $h_s = 1 - \frac{s}{t}$, $v \in T_x M$, $\varphi(u) = \exp(uv)$.

Preuve du théorème 1

Cas où $\mathrm{Ric} - \mathrm{Hess}\, V$ est borné.
Soit $h_s = 1 - \frac{s}{t}$, $v \in T_xM$, $\varphi(u) = \exp(uv)$. Alors pour $\ell > 0$

$$\begin{aligned} d\left(X_s(\ell h_s)\right) &= (dX_s)(\ell h_s) + \partial X_s(\ell h_s)\ell \dot{h}_s\, ds \\ &= (dX_s)(\ell h_s) + W\left(X(\ell h_s)\right)\dot{\varphi}(\ell h_s)\ell \dot{h}_s\, ds. \end{aligned}$$

Preuve du théorème 1

Cas où $\mathrm{Ric} - \mathrm{Hess}\, V$ est borné.
Soit $h_s = 1 - \frac{s}{t}$, $v \in T_x M$, $\varphi(u) = \exp(uv)$. Alors pour $\ell > 0$

$$\begin{aligned} d\left(X_s(\ell h_s)\right) &= (dX_s)(\ell h_s) + \partial X_s(\ell h_s)\ell \dot{h}_s\, ds \\ &= (dX_s)(\ell h_s) + W\left(X(\ell h_s)\right)\dot{\varphi}(\ell h_s)\ell \dot{h}_s\, ds. \end{aligned}$$

Le dernier terme à droite est uniformément borné.

Preuve du théorème 1

Cas où $\mathrm{Ric} - \mathrm{Hess}\, V$ est borné.
Soit $h_s = 1 - \frac{s}{t}$, $v \in T_x M$, $\varphi(u) = \exp(uv)$. Alors pour $\ell > 0$

$$\begin{aligned} d\left(X_s(\ell h_s)\right) &= (dX_s)(\ell h_s) + \partial X_s(\ell h_s)\ell \dot{h}_s\, ds \\ &= (dX_s)(\ell h_s) + W\left(X(\ell h_s)\right)\dot{\varphi}(\ell h_s)\ell \dot{h}_s\, ds. \end{aligned}$$

Le dernier terme à droite est uniformément borné. On pose

$$N_s^\ell = -\int_0^s \left\langle W(X(\ell h_r v))\dot{\varphi}(\ell h_r)\ell \dot{h}_r, d_m X_r(\ell h_r)\right\rangle,$$

Preuve du théorème 1

Cas où $\mathrm{Ric} - \mathrm{Hess}\, V$ est borné.
Soit $h_s = 1 - \frac{s}{t}$, $v \in T_x M$, $\varphi(u) = \exp(uv)$. Alors pour $\ell > 0$

$$\begin{aligned} d\left(X_s(\ell h_s)\right) &= (dX_s)(\ell h_s) + \partial X_s(\ell h_s)\ell \dot{h}_s\, ds \\ &= (dX_s)(\ell h_s) + W\left(X(\ell h_s)\right)\dot{\varphi}(\ell h_s)\ell \dot{h}_s\, ds. \end{aligned}$$

Le dernier terme à droite est uniformément borné. On pose

$$N_s^\ell = -\int_0^s \left\langle W(X(\ell h_r v))\dot{\varphi}(\ell h_r)\ell \dot{h}_r, d_m X_r(\ell h_r)\right\rangle,$$

$$R_s^\ell = \mathcal{E}(N^\ell)_s, \qquad \mathbb{Q}^\ell = R^\ell \cdot \mathbb{P}.$$

Preuve du théorème 1

Cas où $\mathrm{Ric} - \mathrm{Hess}\, V$ est borné.
Soit $h_s = 1 - \frac{s}{t}$, $v \in T_xM$, $\varphi(u) = \exp(uv)$. Alors pour $\ell > 0$

$$\begin{aligned} d\left(X_s(\ell h_s)\right) &= (dX_s)(\ell h_s) + \partial X_s(\ell h_s)\ell \dot{h}_s\, ds \\ &= (dX_s)(\ell h_s) + W\left(X(\ell h_s)\right)\dot{\varphi}(\ell h_s)\ell \dot{h}_s\, ds. \end{aligned}$$

Le dernier terme à droite est uniformément borné. On pose

$$N_s^\ell = -\int_0^s \left\langle W(X(\ell h_r v))\dot{\varphi}(\ell h_r)\ell \dot{h}_r, d_m X_r(\ell h_r)\right\rangle,$$

$$R_s^\ell = \mathcal{E}(N^\ell)_s, \qquad \mathbb{Q}^\ell = R^\ell \cdot \mathbb{P}.$$

Sous $\mathbb{Q}^\ell$, $X_s(\ell h_s)$ est une diffusion de générateur L, partant de $\exp(\ell v)$, vérifiant $X_t(\ell h_t) = X_t^0$.

Preuve du théorème 1

Conséquence

$$P_t f(\exp(\ell v)) = \mathbb{E}\left[f(X_t^0) R_t^\ell\right]$$

Preuve du théorème 1

Conséquence

$$P_t f(\exp(\ell v)) = \mathbb{E}\left[f(X_t^0) R_t^\ell\right]$$

et si on choisit $v = \dfrac{\operatorname{grad} P_t f(x)}{\|\operatorname{grad} P_t f(x)\|}$,

Preuve du théorème 1

Conséquence

$$P_t f(\exp(\ell v)) = \mathbb{E}\left[f(X_t^0) R_t^\ell\right]$$

et si on choisit $v = \dfrac{\operatorname{grad} P_t f(x)}{\|\operatorname{grad} P_t f(x)\|}$, on trouve en dérivant par rapport à ℓ, en $\ell = 0$,

$$\operatorname{grad} P_t f(x) = \mathbb{E}\left[f(X_t^0) \int_0^t - \left\langle W(X^0)(v\dot{h}),\ d_m X^0 \right\rangle\right]$$

Preuve du théorème 1

Conséquence

$$P_t f(\exp(\ell v)) = \mathbb{E}\left[f(X_t^0) R_t^\ell\right]$$

et si on choisit $v = \dfrac{\operatorname{grad} P_t f(x)}{\|\operatorname{grad} P_t f(x)\|}$, on trouve en dérivant par rapport à ℓ, en $\ell = 0$,

$$\operatorname{grad} P_t f(x) = \mathbb{E}\left[f(X_t^0) \int_0^t -\left\langle W(X^0)(v\dot{h}),\ d_m X^0 \right\rangle\right]$$

et il suffit d'appliquer le lemme fondamental à $\delta f(X_t^0)$ et $-\dfrac{1}{\delta} \displaystyle\int_0^t \left\langle W(X^0)(v\dot{h}),\ d_m X^0 \right\rangle$ pour obtenir le résultat.

Preuve du théorème 1

Conséquence

$$P_t f(\exp(\ell v)) = \mathbb{E}\left[f(X_t^0) R_t^\ell\right]$$

et si on choisit $v = \dfrac{\operatorname{grad} P_t f(x)}{\|\operatorname{grad} P_t f(x)\|}$, on trouve en dérivant par rapport à ℓ, en $\ell = 0$,

$$\operatorname{grad} P_t f(x) = \mathbb{E}\left[f(X_t^0) \int_0^t -\left\langle W(X^0)(v\dot{h}),\ d_m X^0\right\rangle\right]$$

et il suffit d'appliquer le lemme fondamental à $\delta f(X_t^0)$ et $-\dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_0^t \left\langle W(X^0)(v\dot{h}),\ d_m X^0\right\rangle$ pour obtenir le résultat.

Remarque : cette méthode marche aussi pour $P_t^D f$, et $\operatorname{Ric} - \operatorname{Hess} V$ est toujours borné dans D.

Preuve du théorème 1

Cas général

Preuve du théorème 1

Cas général

Lemme

Preuve du théorème 1

Cas général

Lemme

Pour $x \in D$,

Preuve du théorème 1

Cas général

Lemme

Pour $x \in D$,

$$P_t f(x) = P_t^D f(x) + \int_{]0,t] \times \partial D} P_{t-s} f(z) h_x(s,z)\, ds \nu(dz)$$

Preuve du théorème 1

Cas général

Lemme

Pour $x \in D$,

$$P_t f(x) = P_t^D f(x) + \int_{]0,t] \times \partial D} P_{t-s} f(z) h_x(s,z) \, ds \nu(dz)$$

où $h_x(s,z)$ est la densité de $(\tau(x), X_{\tau(x)}(x))$ par rapport à $ds \, \nu(dz)$, où $\nu(dz)$ est la mesure superficielle sur ∂D induite par $\mu(dx) = e^{V(x)} dx$.

Preuve du théorème 1

Cas général

Lemme

Pour $x \in D$,

$$P_t f(x) = P_t^D f(x) + \int_{]0,t] \times \partial D} P_{t-s} f(z) h_x(s,z)\, ds \nu(dz)$$

où $h_x(s,z)$ est la densité de $(\tau(x), X_{\tau(x)}(x))$ par rapport à $ds\, \nu(dz)$, où $\nu(dz)$ est la mesure superficielle sur ∂D induite par $\mu(dx) = e^{V(x)} dx$.

Démonstration : propriété de Markov forte.

Preuve du théorème 1

conséquence :

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} P_t f(x) &= \operatorname{grad} P_t^D f(x) \\ &+ \int_{]0,t]\times\partial D} P_{t-s} f(z) \operatorname{grad} \log h_{\cdot}(s,z) h_x(s,z) ds \nu(dz).\end{aligned}$$

Preuve du théorème 1

conséquence :

$$\operatorname{grad} P_t f(x) = \operatorname{grad} P_t^D f(x) + \int_{]0,t]\times\partial D} P_{t-s} f(z) \operatorname{grad} \log h_{.}(s,z) h_x(s,z) ds\nu(dz).$$

Il reste à appliquer le lemme fondamental à la seconde intégrale, avec la mesure sur $]0,t] \times \partial D$

$$\tilde{\mu} = h_x(s,z) ds\nu(dz) \quad \text{de masse} \quad \mathbb{P}(\tau(x) \leq t < \xi(x))$$

Preuve du théorème 1

conséquence :

$$\operatorname{grad} P_t f(x) = \operatorname{grad} P_t^D f(x) + \int_{]0,t]\times\partial D} P_{t-s} f(z) \operatorname{grad} \log h_{\cdot}(s,z) h_x(s,z) ds\nu(dz).$$

Il reste à appliquer le lemme fondamental à la seconde intégrale, avec la mesure sur $]0,t] \times \partial D$

$$\tilde{\mu} = h_x(s,z)ds\nu(dz) \quad \text{de masse} \quad \mathbb{P}(\tau(x) \leq t < \xi(x))$$

et les fonctions $\delta P_{t-s} f(z)$, $\frac{1}{\delta}\|\operatorname{grad} \log h_{\cdot}(s,z)\|$.

Preuve du théorème 1

conséquence :

$$\operatorname{grad} P_t f(x) = \operatorname{grad} P_t^D f(x) + \int_{]0,t]\times\partial D} P_{t-s} f(z) \operatorname{grad} \log h_.(s,z) h_x(s,z) ds \nu(dz).$$

Il reste à appliquer le lemme fondamental à la seconde intégrale, avec la mesure sur $]0,t] \times \partial D$

$$\tilde{\mu} = h_x(s,z) ds \nu(dz) \quad \text{de masse} \quad \mathbb{P}(\tau(x) \leq t < \xi(x))$$

et les fonctions $\delta P_{t-s} f(z)$, $\frac{1}{\delta} \| \operatorname{grad} \log h_.(s,z) \|$. On majore ainsi le deuxième terme par

$$\delta \mathbb{E}\left[f \log \frac{f(X_t)}{I} 1_{\tau(x)\leq t<\xi(x)} \right] + I \log \mathbb{E}\left[1_{\tau(x)\leq t<\xi(x)} e^{\frac{1}{\delta} \| \operatorname{grad} \log h_x(\tau, X_\tau) \|} \right]$$

avec $I = \mathbb{E}\left[f(X_t) 1_{\tau(x)\leq t<\xi(x)} \right]$.

Preuve du théorème 1

conséquence :

$$\operatorname{grad} P_t f(x) = \operatorname{grad} P_t^D f(x) + \int_{]0,t]\times\partial D} P_{t-s} f(z) \operatorname{grad} \log h_.(s,z) h_x(s,z) ds \nu(dz).$$

Il reste à appliquer le lemme fondamental à la seconde intégrale, avec la mesure sur $]0,t] \times \partial D$

$$\tilde{\mu} = h_x(s,z) ds \nu(dz) \quad \text{de masse} \quad \mathbb{P}(\tau(x) \leq t < \xi(x))$$

et les fonctions $\delta P_{t-s} f(z)$, $\frac{1}{\delta} \| \operatorname{grad} \log h_.(s,z) \|$. On majore ainsi le deuxième terme par

$$\delta \mathbb{E}\left[f \log \frac{f(X_t)}{I} 1_{\tau(x) \leq t < \xi(x)} \right] + I \log \mathbb{E}\left[1_{\tau(x) \leq t < \xi(x)} e^{\frac{1}{\delta} \| \operatorname{grad} \log h_x(\tau, X_\tau) \|} \right]$$

avec $I = \mathbb{E}\left[f(X_t) 1_{\tau(x) \leq t < \xi(x)} \right]$.
Il reste ensuite à évaluer $\log \mathbb{E}\left[1_{\tau(x) \leq t < \xi(x)} e^{\frac{1}{\delta} \| \operatorname{grad} \log h_x(\tau, X_\tau) \|} \right]$.