Approximations du temps local des diffusions réversibles

Bérard Bergery Blandine

Institut Élie Cartan,
Université Henri Poincaré,
Nancy

11 septembre 2007

Plan

Plan

1. Introduction
2. Un schéma d'approximation : $J_\epsilon(t)$
3. Décomposition de $J_\epsilon(t)$ et résultats supplémentaires
4. Idées de preuve

Semimartingales et Temps local

On se place sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, vérifiant les hypothèses habituelles.

Dans tout l'exposé, $X = X_0 + M + V$ est une semimartingale continue, avec M martingale locale continue et V processus continu à variation finie.

On note $< X >=< M >$ la variation quadratique de X.

Théorème (formule d'Itô)

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d < X >_s, \quad f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$$

La mesure aléatoire $g \to \int_0^t g(X_s)d < X >_s$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue :

Définition

Il existe une famille de processus $(L_t^x(X), x \in \mathbb{R}, t \geqslant 0)$ *appelé le temps local de* X*, telle que pour toute fonction* g *borélienne positive définie sur* $\mathbb{R}$ *, on a p.s* $\forall t \geqslant 0$ *:*

$$\int_0^t g(X_s)d < X >_s = \int_{\mathbb{R}} g(a)L_t^a(X)da.$$

Quelques propriétés du temps local :

- $\forall a \in \mathbb{R}$, $t \to L_t^a$ est croissant.
- $(a, t) \to L_t^a(X)$ est p.s continu en t et càdlàg en a.

Theorem (Formule de Tanaka)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t 1\!\!1_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a(X),$$

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t 1\!\!1_{\{X_s \leqslant a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a(X).$$

Theorem (Formule d'Itô-Tanaka)

Soit f une fonction convexe, alors

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^x f''(dx),$$

Diffusions réversibles

Retournement du temps : pour $T > 0$ fixé, on pose

$$\widetilde{X}_u = X_{T-u}, \quad u \in [\,0, T].$$

Quelles hypothèses imposer à X pour que le processus retourné $\widetilde{X}$ soit encore une semimartingale ?

F. Russo, P. Vallois, and J. Wolf.
A generalized class of Lyons-Zheng processes.
Bernoulli, 7(2) :363–379, 2001.

Théorème (diffusion réversible)

Soit X une diffusion qui vérifie $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^t b(s, X_s) ds$, avec

$$\begin{cases} \forall t \in [0,T], X_t \ \textit{a une densité}\ p(t,x)dx, \\ \sigma, b \ \textit{sont conjointement continus}, \\ \sigma^2(s,.) \in W^{2,1}_{loc}(\mathbb{R}), b(s,.) \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}), xp(s,.) \in W^{2,\infty}_{loc}(\mathbb{R}), \\ p\sigma^2(s,.) \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}) \ \textit{pour presque tout}\ s \in [0,T], \\ \frac{\partial p \sigma^2}{\partial x}, \frac{\partial^2 xp}{\partial x^2} \in L^1([0,t] \times \mathbb{R}), t \in]0,T]. \end{cases}$$

Alors, $(\widetilde{X}_u)_{u \in [\ 0,T]}$ est une diffusion qui vérifie $\widetilde{X}_u = X_T + \int_0^u \sigma(T-s, \widetilde{X}_s) d\beta_s + \int_0^u \tilde{b}(T-s, \widetilde{X}_s) ds$, où β est un mouvement brownien sur un espace pouvant être élargi et $\tilde{b}(s,x)$ est explicite.

Mode de convergence

Définition (Notation ucp)

On dit que $(H_t^{(\epsilon)})_{t\geqslant 0}$ *converge vers* $(H_t)_{t\geqslant 0}$ *uniformément sur les compacts en probabilité (notation ucp) si*

$$\forall T > 0, \lim_{\epsilon\to 0} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |H_t^{(\epsilon)} - H_t| = 0 \text{ en probabilité.}$$

On se place donc sur un intervalle $[0, T]$. Pour X une diffusion réversible, on cherche un (ou des) schéma(s) qui converge(nt) en probabilité vers le temps local $L_t^y(X)$, uniformément sur $[0, T]$.

En réalité, on va utiliser deux types de convergences : la convergence presque sûre et la convergence dans L^2.

Plan

Pour X un processus continu, f, g deux fonctions continues, on considère

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(f(X_{(s+\epsilon)\wedge t}) - f(X_s)\right)\left(g(X_{(s+\epsilon)\wedge t}) - g(X_s)\right) ds.$$

Si X est une semi-martingale continue et $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, alors cette quantité converge au sens (ucp) vers $< f(X), g(X) >_t$.

F. Russo and P. Vallois.
Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratic variation processes.
Stochastics Stochastics Rep., 70(1-2) :1–40, 2000.

F. Russo and P. Vallois.
Elements of stochastic calculus via regularisation.
Séminaire de Probabilités, XXXX, Lecture Notes in Math, 2006.

Soit y fixé. Pour $f(x) = x$ et $g(x) = \mathbb{1}_{\{y<x\}}$ (non continu), on note la quantité précédente

$$J_\epsilon(t, y) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\mathbb{1}_{\{y<X_{(s+\epsilon)\wedge t}\}} - \mathbb{1}_{\{y<X_s\}}\right)\left(X_{(s+\epsilon)\wedge t} - X_s\right) ds.$$

La mesure $J_\epsilon(t, y)dy$ converge dans un certain sens vers $L_t^y(X)dy$.

Proposition

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}(ucp) \int_{\mathbb{R}} f(y)J_\epsilon(t, y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)L_t^y(X)dy, \quad \forall f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}).$$

Est-ce que $J_\epsilon(t, y)$ converge vers $L_t^y(X)$ pour y fixé ?

Note : Dans la suite, on prend $y = 0$ et $J_\epsilon(t) = J_\epsilon(t, 0)$.

Théorème

Si X est une diffusion réversible vérifiant les hypothèses du Théorème 5, alors

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \quad (ucp)\; J_\epsilon(t) = L_t^0(X).$$

B. Bérard Bergery and P. Vallois.
Approximation via regularization of the local time of semimartingales and brownian motion.

Plan

On décompose $J_\epsilon(t)$ en deux termes :

$$J_\epsilon(t) = J_\epsilon^1(t) + J_\epsilon^2(t),$$

avec

$$\begin{aligned} J_\epsilon^1(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} + X^-_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u > 0\}} du, \\ J_\epsilon^2(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^-\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t} > 0\}} + X_u^+\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t} \leqslant 0\}} du. \end{aligned}$$

Théorème

Si X est une diffusion vérifiant les hypothèses du Théorème 5, alors

$$1)\quad \lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \ (ucp)\ J_\epsilon^1(t) = \frac{1}{2}L_t^0(X).$$

$$2)\quad \lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \ (ucp)\ J_\epsilon^2(t) = \frac{1}{2}L_t^0(X).$$

En additionnant les deux points, on montre la convergence de $J_\epsilon(t)$ vers $L_t^0(X)$.

Théorème

Si X est une diffusion vérifiant les hypothèses du Théorème 5, alors

$$1) \quad \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \ (ucp)\ J_\epsilon^1(t) = \frac{1}{2} L_t^0(X).$$

$$2) \quad \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \ (ucp)\ J_\epsilon^2(t) = \frac{1}{2} L_t^0(X).$$

En additionnant les deux points, on montre la convergence de $J_\epsilon(t)$ vers $L_t^0(X)$.

- Le point 1) est vrai si X est une semi-martingale continue. Le caractère réversible n'intervient que dans le point 2).

Décomposition de $J_\epsilon(t)$

On transforme les indicatrices :

$$\mathbb{1}_{\{X_{(s+\epsilon)\wedge t}>0\}} - \mathbb{1}_{\{X_s>0\}} = \mathbb{1}_{\{X_{(s+\epsilon)\wedge t}>0, X_s\leqslant 0\}} - \mathbb{1}_{\{X_{(s+\epsilon)\wedge t}\leqslant 0, X_s>0\}}.$$

On reporte dans $J_\epsilon(t)$

$$\begin{aligned} J_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t & \quad \mathbb{1}_{\{X_{(s+\epsilon)\wedge t}>0, X_s\leqslant 0\}} X_{(s+\epsilon)\wedge t} \\ + & \quad \mathbb{1}_{\{X_{(s+\epsilon)\wedge t}>0, X_s\leqslant 0\}} (-X_s) \\ + & \quad \mathbb{1}_{\{X_{(s+\epsilon)\wedge t}\leqslant 0, X_s>0\}} (-X_{(s+\epsilon)\wedge t}) \\ + & \quad \mathbb{1}_{\{X_{(s+\epsilon)\wedge t}\leqslant 0, X_s>0\}} X_s \quad ds. \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}
X_{(s+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_{(s+\epsilon)\wedge t}>0\}} &= X^+_{(s+\epsilon)\wedge t},\\
-X_{(s+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_{(s+\epsilon)\wedge t}\leqslant 0\}} &= X^-_{(s+\epsilon)\wedge t},\\
-X_s\mathbb{1}_{\{X_s\leqslant 0\}} &= X^-_s,\\
X_s\mathbb{1}_{\{X_s>0\}} &= X^+_s.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$J_\epsilon(t) = \underbrace{\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} + X^-_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u > 0\}}\,du}_{J^1_\epsilon(t)}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_u \mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t} > 0\}} + X^+_u \mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t} \leqslant 0\}}\,du}_{J^2_\epsilon(t)}\,.$$

Plan

Convergence de $J_\epsilon^1(t)$

On étudie

$$J_\epsilon^1(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} + X^-_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u > 0\}}\,du.$$

D'après la formule de Tanaka

$$\begin{cases} X^+_{(u+\epsilon)\wedge t} & = & X_u^+ + \int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_s>0\}}dX_s + \frac{1}{2}(L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L_u^0(X)), \\ X^-_{(u+\epsilon)\wedge t} & = & X_u^- - \int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_s\leqslant 0\}}dX_s + \frac{1}{2}(L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L_u^0(X)). \end{cases}$$

Multiplier par les indicatrices donne

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{1}_{\{X_u\leqslant 0\}}X^+_{(u+\epsilon)\wedge t} & = & \int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u\leqslant 0, X_s>0\}}dX_s \\ & & +\frac{\mathbb{1}_{\{X_u\leqslant 0\}}}{2}(L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X)-L^0_u(X)), \\ \mathbb{1}_{\{X_u>0\}}X^-_{(u+\epsilon)\wedge t} & = & -\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u>0, X_s\leqslant 0\}}dX_s \\ & & +\frac{\mathbb{1}_{\{X_u>0\}}}{2}(L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X)-L^0_u(X)). \end{array}\right.$$

En additionnant, on obtient trois termes car les indicatrices devant les temps locaux se simplifie. Cette simplification est importante pour la démonstration.

$$\begin{aligned} J_\epsilon^1(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s>0, X_u\leqslant 0\}} dX_s\right) du \\ &\quad -\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s\leqslant 0, X_u>0\}} dX_s\right) du \\ &\quad +\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t (L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))du. \end{aligned}$$

Les deux premières lignes convergeant vers 0, la limite de $J_\epsilon^1(t)$ est donnée par la limite de la troisième ligne.

Convergence de $\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t (L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))du$.

$$\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t (L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))du = \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} dL^0_s(X)\right) du.$$

Par le théorème de Fubini, on a

$$\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t (L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))du = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{s\wedge\epsilon}{\epsilon} dL^0_s(X).$$

Par le Théorème de convergence dominée :

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t (L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))du \to \frac{1}{2}\int_0^t dL^0_s(X) = \frac{1}{2}L^0_t(X).$$

Si on n'avait pas simplifié les indicatrices...

Étudions par exemple $\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_u>0\}}(L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))du$.

Par le théorème de Fubini, on a

$$\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_u>0\}}(L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))du =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u>0\}}du\right) dL^0_s.$$

$\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u>0\}}du$ converge vers $\mathbb{1}_{\{X_s>0\}}$, presque sûrement par rapport à la mesure de Lebesgue. Mais $dL^0_s(X)$ est une mesure singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. On ne peut donc pas conclure.

Convergence de $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s>0, X_u\leqslant 0\}} dX_s\right) du$.

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s>0, X_u\leqslant 0\}} dX_s\right) du =$$

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s>0, X_u\leqslant 0\}} dV_s\right) du$$
$$+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s>0, X_u\leqslant 0\}} dM_s\right) du.$$

Pour le premier terme, on applique le théorème de Fubini, et on a

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>0\}} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u\leqslant 0\}} du \right) dV_s.$$

Pour tout $s \in [0, T]$ tel que $X_s > 0$, comme $t \to X_t$ est continu, $\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u\leqslant 0\}} du = 0$ dès que ϵ est assez petit. Ce terme est borné par 1, donc par théorème de convergence dominée

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>0\}} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u\leqslant 0\}} du \right) dV_s = 0.$$

Pour le deuxième terme, on utilise une version stochastique du théorème de Fubini et on a

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>0\}} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^{s} \mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} du \right) dM_s.$$

On passe par la formule de Doob :

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>0\}} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^{s} \mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} du \right) dM_s \right)^2 \right] \leqslant$$

$$4E\left[\int_0^T \mathbb{1}_{\{X_s>0\}} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^{s} \mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} du \right)^2 d < M >_s \right].$$

Par le théorème de convergence dominée,le deuxième membre de l'inégalité converge vers 0.

Convergence de $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0, X_u > 0\}} dX_s\right) du$**.** Comme précédemment, on décompose ce terme en

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0, X_u > 0\}} dV_s\right) du$$
$$+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0, X_u > 0\}} dM_s\right) du.$$

A la différence du terme précédent, $\mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0\}}$ contient une inégalité large, donc la méthode précédente ne marche pas directement. En effet, pour s tel que $X_s \leqslant 0$, $\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u > 0\}} du$ converge vers 0 presque sûrement par rapport à la mesure de Lebesgue. Mais comme on n'a fait aucune hypothèses sur l'absolu continuité de dV et $d < M >$, on ne peut pas conclure.

Pour le premier terme, on va donc utiliser $\mathbb{1}_{\{X_u>0\}}$:

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_u>0\}} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s\leqslant 0\}} dV_s \right) du.$$

Pour tout $u \in [0, T]$ tel que $X_u > 0$, comme $t \rightarrow X_t$ est continu, $(\frac{1}{\epsilon} \int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s\leqslant 0\}} dV_s = 0$ dès que ϵ est assez petit. Ce terme est borné par la variation totale de V, donc par théorème de convergence dominée

$$\lim_{\epsilon\rightarrow 0} \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_u>0\}} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s\leqslant 0\}} dV_s \right) du = 0.$$

Pour le deuxième terme, on utilise une version stochastique du théorème de Fubini et on a

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0\}} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u > 0\}} du \right) dM_s.$$

On passe par la formule de Doob :

$$E\left[\sup_{t \in [0,T]} \left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0\}} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u > 0\}} du \right) dM_s \right)^2 \right] \leqslant$$

$$4E\left[\int_0^T \mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0\}} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u > 0\}} du \right)^2 d < M >_s \right].$$

Il reste à établir la convergence du second membre de l'inégalité vers 0.

On le décompose en

$$4E\left[\int_0^T \mathbb{1}_{\{X_s<0\}}\left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u>0\}}du\right)^2 d<M>_s\right]+$$
$$4E\left[\int_0^T \mathbb{1}_{\{X_s=0\}}\left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u>0\}}du\right)^2 d<M>_s\right].$$

Comme on a $\mathbb{1}_{\{X_s<0\}}$ dans le premier terme, la convergence vers 0 vient du théorème de convergence dominée. Pour le deuxième terme, remarquons que $\left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u>0\}}du\right)^2$ est borné par 1 et que, par la formule de densité d'occupation :

$$\int_0^T \mathbb{1}_{\{X_s=0\}}d<M>_s=\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x=0\}}L_T^x dx=0.$$

Donc ce deuxième terme est nul.

Convergence de $J_\epsilon^2(t)$

On étudie

$$J_\epsilon^2(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^- \mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t} > 0\}} + X_u^+ \mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t} \leqslant 0\}} du.$$

L'idée principale est de se ramener de J^2 à J^1 par retournement du temps.

On commence par écrire :

$$J_\epsilon^2(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^{t-\epsilon} X_u^- \mathbb{1}_{\{X_{u+\epsilon} > 0\}} + X_u^+ \mathbb{1}_{\{X_{u+\epsilon} \leqslant 0\}} du + R_\epsilon(t).$$

$R_\epsilon(t)$ est une notation générique pour un terme de reste convergeant presque sûrement vers 0, uniformément en t.

On retourne le temps par le changement de variable $s = T - u - \epsilon$:

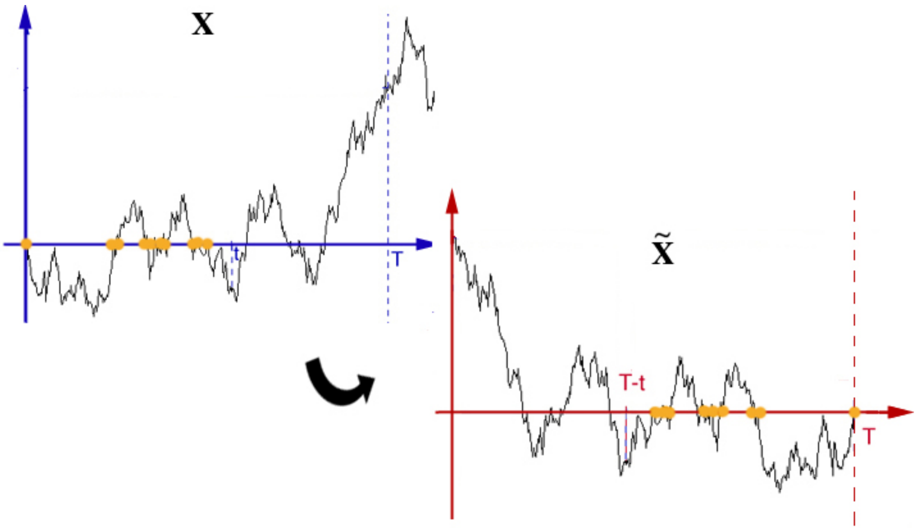
$$J_\epsilon^2(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{T-t}^{T-\epsilon} X^-_{T-s-\epsilon}\mathbb{1}_{\{X_{T-s}>0\}} + X^+_{T-s-\epsilon}\mathbb{1}_{\{X_{T-s}\leqslant 0\}}du + R_\epsilon(t).$$

En utilisant $\widetilde{X}_u = X_{T-u}$, on arrive à

$$J_\epsilon^2(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{T-t}^{T} \widetilde{X}^-_{(s+\epsilon)\wedge T}\mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s>0\}} + \widetilde{X}^+_{(s+\epsilon)\wedge T}\mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s\leqslant 0\}}du + R_\epsilon(t).$$

On reconnait donc le terme $J_\epsilon^1(t)$ pour $\widetilde{X}$, qui est une semimartingale.

$$\lim_{\epsilon\to 0}\ (\mathrm{ucp})\ J_\epsilon^2(t) = \frac{1}{2}(L_T^0(\widetilde{X}) - L_{T-t}^0(\widetilde{X})).$$


X
t
T
X̃
T-t
T

Pour finir, on utilise la continuité à droite de $a \to L^a_T(\widetilde{X})$ et la formule de densité d'occupation pour écrire

$$L^0_T(\widetilde{X}) - L^0_{T-t}(\widetilde{X}) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \int_{T-t}^{T} \mathbb{1}_{\{0<\widetilde{X}_u<\alpha\}} d < \widetilde{X} >_u .$$

Comme $< \widetilde{X} >_u = \int_0^u \sigma^2(T-s, \widetilde{X}_s) ds$, on a

$$L^0_T(\widetilde{X}) - L^0_{T-t}(\widetilde{X}) = \lim_{\alpha \to 0} \int_{T-t}^{T} \mathbb{1}_{\{0<X_{T-u}<\alpha\}} \sigma^2(T-u, X_{T-u}) du.$$

Le changement de variable $s = T_u$ donne

$$\begin{aligned} L^0_T(\widetilde{X}) - L^0_{T-t}(\widetilde{X}) &= \lim_{\alpha \to 0} \int_0^t \mathbb{1}_{\{0 < X_s < \alpha\}} \sigma^2(s, X_s) ds, \\ &= \lim_{\alpha \to 0} \int_0^t \mathbb{1}_{\{0 < X_s < \alpha\}} d < X >_s, \\ &= L^0_t(X) \end{aligned}$$

Et si on coupait les cheveux en quatre.... ?

D'une manière évidente, on peut encore décomposer J^1_ϵ et J^2_ϵ en une somme de deux termes. Au final, on a quatre termes :

$$\begin{aligned}
J^3_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u>0\}}\,du,\\
J^4_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}\,du,\\
J^5_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_u\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0\}}\,du,\\
J^6_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}}\,du.
\end{aligned}$$

Il parait naturel de se demander si chacun de ses termes converge vers $\frac{1}{4}L^0_t(X)$. Nous n'avons pas de réponse pour les diffusions réversibles en général.

Théorème

Si X est le mouvement Brownien standard

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} (ucp) J_\epsilon^3(t) &= \frac{1}{4} L_t^0(X), \\
\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} (ucp) J_\epsilon^4(t) &= \frac{1}{4} L_t^0(X), \\
\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} (ucp) J_\epsilon^5(t) &= \frac{1}{4} L_t^0(X), \\
\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} (ucp) J_\epsilon^6(t) &= \frac{1}{4} L_t^0(X).
\end{aligned}
$$

On présente rapidement les idées de la preuve pour $J_\epsilon^3(t)$. On remplace $X_{(u+\epsilon)}$ par $E(X_{(u+\epsilon)} / \mathcal{F}_u)$. Par les propriétés de semi-groupe de X, on montre que $E(X_{(u+\epsilon)} / \mathcal{F}_u) = f(\frac{X_u}{\epsilon})$, avec f une fonction. La formule de densité d'occupation donne :

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t f(\frac{X_u}{\epsilon})\mathbb{1}_{\{X_u>0\}}du = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\infty f(\frac{x}{\epsilon})L_t^x dx.$$

Le changement de variable $\sqrt{\epsilon}y = x$ donne $\int_0^\infty f(y)L_t^{\epsilon y}dx$. Finalement, on montre la convergence vers $\int_0^\infty f(y)dxL_t^0 = \frac{1}{4}L_t^0(X)$.