Equations d'évolution et processus attachés

Koléhè Abdoulaye Coulibaly, sous la direction de Marc Arnaudon et Anton Thalmaier

Laboratoire de Mathématiques et Applications
Université de Poitiers, France

Journées de probabilités 2007

Plan

- Construction d'un brownien sur une variété dont la métrique $g(t)$ dépend du temps :

Definition

C'est la solution de :

$$\begin{cases} X_0 & = & x_0 \\ \forall f \in C^\infty(M)\ ,\ d(f(X_t)) & \stackrel{d\mathcal{M}}{\equiv} & \frac{1}{2}\Delta_{g(t)} f(X_t) dt \end{cases}$$

Proposition

On suppose que g est C^∞ en (t,x).
On considère l'EDS(*) sur $\mathcal{F}(M)$ définie comme suit :

$$\begin{cases} *dU_t = \sum_{i=1}^{d} L_i(t,U_t) * dW^i + A_{\alpha,\beta}(t,U_t)\hat{V}_{\alpha,\beta}(U_t)dt \\ U_0 \in \mathcal{F}(M) \text{ tq } (U_0 e_i)_{i\in[1..d]} \text{ soit une b.o.n pour g(0) .} \end{cases}$$

Alors on peut choisir $A_{\alpha,\beta}(t,U)$ telle que :

- *elle soit C^∞ en (t,U)*
- *et surtout telle que la solution de l'EDS(*) vérifie :*

$$d\left(\left\langle U_t e_i, U_t e_j \right\rangle_{g(t,\pi(U_t))}\right) = 0 \quad \forall i,j \in [1..d]$$

Proposition

- *De plus, on peut choisir $A_{\alpha,\beta}(t, U_t)$ symétrique.*
- *Dans ce cas, on a unicité et :*

$$A_{\alpha,\beta}(t, U_t) = -\frac{1}{2}(\partial_1 G)(t, U_t e_\alpha, U_t e_\beta)dt$$

- Le $g(t)$ MB est la projection de la solution de cette EDS.
- U_t est une "bonne notion" de transport parallèle.
- Si g constant, c'est la construction "économique" du MB sur une variété.

Definition

Soient M une variété compacte riemanienne de dimension $n-1$ et $F_0 \to \mathbb{R}^n$ un plongement lisse. On dit que $M_0 = F_0(M)$ évolue par sa courbure moyenne s'il existe une famille $F(t,.)$ de plongements lisses de M dans $\mathbb{R}^n$ avec $M_t = F(t,M)$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}F(t,x) &= -H_\eta(t,x)\vec{\eta}(t,x), \qquad (t,x) \in I \times M \\ F(0,x) &= F_0(x), \qquad x \in M \end{aligned}$$

$H_\eta(t,x)$ est la courbure moyenne en $F(t,x)$ sur M_t et l'intervalle de temps I est celui de vie de la solution.

Lemme

Soient (M, g) une variété différentielle de dimension n-1 et ι une immersion isométrique de (M, g) dans $\mathbb{R}^n$ ie

$$(M, g) \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^n.$$

Alors :

$$\forall x \in M \quad \Delta\iota(x) = -H_\eta(x)\vec{\eta}(x)$$

où $\vec{\eta}(x)$ est le vecteur normal unitaire en x, et $H_\eta(x)$ la courbure moyenne en x (ie la trace de la seconde forme fondamentale).

Proposition

Soit M de dimension $n-1$ plongée dans $\mathbb{R}^n$ par F_0. Soit :

$$F : [0, T[\times M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

où $F(t,.)$ est un difféomorphisme de M sur son image $M_t = F(t, M)$.
M est muni de la famille de métriques g_t pullback des métriques sur M_t par $F(t,.)$. Soit $\tilde{g}_t^S = \frac{1}{2} g_{S-t}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
i) $F(t,.)$ est solution du flot par courbure moyenne .
ii)$\forall x_0 \in M$, $\forall S \in [0, T[$, si $X^S(x_0)$ est un $(\tilde{g}_t^S)_{t\in[0,S]} - MB(x_0)$ alors :

$$Y_t^S = F(S-t, X_t^S(x_0))$$

est une martingale locale dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition

$$\langle dY_t^S, dY_t^S \rangle = 2(n-1)dt$$

Proposition

Soient M une variété riemanienne compacte de dimension d et T le temps d'explosion du flot par courbure moyenne. Alors :

$$T \text{ est fini et } T \leq \frac{diam(M_0)^2}{2d}$$

Definition

Soient M une variété differentielle strictement convexe compacte, $F(t,.)$ la solution du flot par courbure moyenne et T le temps d'explosion.
Posons pour $\epsilon \in]0, T]$ et $t > 0$:

$$X_t^{\epsilon}(x_0) = \begin{cases} x_0 \text{ si t } \leq \epsilon \\ \frac{1}{2}g(T-t) - MB(x_0) \text{ si t } \geq \epsilon \end{cases}$$

et

$$Y_t^{\epsilon}(x_0) = \begin{cases} F(T-\epsilon, x_0) \text{ si t } \leq \epsilon \\ F(T-t, X_t^{\epsilon}(x_0)) \text{ si t } \geq \epsilon \end{cases}$$

Tout ce ramdam parce que la fonction $g(t)$ n'est pas définie au moment de l'explosion.

Proposition

Y_t^ϵ est tendue et toutes ses valeurs d'adhérence sont des martingales.

Proposition

X_t^ϵ est tendue .

Proposition

Soit $X_{]0,T]}^\varphi$ une valeur d'adhérence de X_t^ϵ, alors c'est un $\frac{1}{2}g(T-t)-MB$ au sens où :

$$\forall \epsilon > 0,\ X_{[\epsilon,T]}^\varphi \text{ est un } \frac{1}{2}g(T-u)_{u\in[\epsilon,T]} - MB(X_\epsilon^\varphi).$$

Proposition

Sous l'hypothèse (M, g) variété strictement convexe, compacte et $(M, g(t))$ le flot par courbure moyenne, il existe un unique $g(T-t)-MB$ en loi.

Corollaire

Soit $X^T_{]0,T]}$ un $g(T-t)-MB$ de loi $h(t,y)d\mu_{T-t}$ alors

$$\frac{\partial}{\partial t}h(t,y) + H^2(T-t,y)h(t,y) = \frac{1}{2}\Delta_{g(T-t)}h(t,y)$$

admet une solution unique sur $]0,T]$, (avec $\int_M h(T,y)d\mu_0 = 1$).

Definition

Le forward Ricci flot est défini par :

$$\begin{cases} \Delta_t f(t,x) &= \frac{1}{2}\partial_t f(t,x) \\ \frac{d}{dt} g_{i,j} &= -Ric_{i,j} \\ f(0,x) &= f_0(x) \end{cases}$$

Proposition

Soient de tels $g(t)$ et f. Soient U_t^T le transport parallèle le long d'un $g(T-t)-MB(x)$ et $X_t^T(x) = \Pi(U_t^T)$, alors :

$$\forall v \in T_x M,\ df(T-t,.)_{X_t^T(x)}(U_t^T (U_0^T)^{-1} v)$$

est une martingale locale.

Lemme

Pour tout processus k à valeur dans $\mathbb{R}^n$, tel que $k \in L_{loc}(W)$ où W et un brownien dans $\mathbb{R}^n$, et $\forall v \in T_x M$,

$$\begin{aligned} N_t &= df(T-t,.)_{X_t^T(x)}(U_t^T)[(U_0^T)^{-1}v - \int_0^t k_r dr] \\ &+ f(T-t, X_t^T(x)) \int_0^t \langle k_r, dW \rangle_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

est une martingale locale.

Corollaire

Soit $v \in T_x M$, et soit par exemple $k_r = \frac{(U_0^T)^{-1}v}{T} \mathbb{1}_{[0,T]}$ alors :

$$df(T,.)_x v = \frac{1}{T} \sum_i \mathbb{E}[f_0(X_T^T(x)) \langle U_0^T)^{-1}v, e_i \rangle_{\mathbb{R}^n} W_i(T)]$$

Corollaire

Soit $\mathcal{M} = sup_M |f_0|$, *et n la dimension de M alors :*

$$\left\| \nabla^T f(T,x) \right\|_T \leq \frac{\mathcal{M} n}{\sqrt{T}}$$