Vorticité quantique à l'équilibre pour le modèle XY

Hicham EL BOUANANI, Michel ROULEUX

Journées de probabilités 2007

La Londe 10-14 Septembre 2007

Introduction

Modèles de spin sur réseau avec groupe continu de symétries, $G = O^{+}(2)$ pour le modèle XY.

1. Cas classique: le modèle de Kac

Le Hamiltonien, restreint à un domaine $\Lambda \in \mathbb{Z}^2$ (par exemple un carré) est de la forme:

$$H_{\gamma}(\sigma_{\Lambda}) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j \in \Lambda} \gamma^2 J(\gamma(i-j)) \langle \sigma_{\Lambda}(i), \sigma_{\Lambda}(j) \rangle, \quad \sigma_{\Lambda}(j) \in S^1$$

J à symétrie radiale, est le potentiel d'interaction à support compact, ferromagnétique $(J \geq 0)$, $\int J = 1$ et $\gamma \geq 0$ un petit paramètre.

Les propriétés physiques intéressantes (comme la transition de phase), ont lieu dans la limite thermodynamique $|\Lambda| \to \infty$

Pour le modèle de Kac, on prend d'abord la limite $|\Lambda| \to \infty$ puis $\gamma \to 0$

A l'équilibre thermodynamique à la température inverse $\beta \succ 0$ le système est décrit par sa mesure de Gibbs:

$$\mu_{\beta,\gamma}(d\sigma) = \frac{1}{Z_{\beta,\gamma}} \exp\left[-\beta H_\gamma(\sigma)\right] \upsilon(d\sigma)$$

où $\upsilon(d\sigma) = \prod_{i \in \Lambda} \upsilon(d\sigma_\Lambda(i))$ est la mesure canonique sur $\mathbb{Z}^2 \otimes S^{q-1}$

et $Z_{\beta,\gamma}$ (fonction de partition) est un facteur de normalisation qui fait de $\mu_{\beta,\gamma}$ une mesure de probabilité

- Absence de brisure de la symétrie continue + unicité de l’état de Gibbs à toute température.
- Apparition d’une transition de phase de seconde ordre: excitations topologiques (vortex), décrites par Kosterlitz & Thouless.

Pour créer des vortex en volume fini, On applique un champ magnétique à l'extérieur de façon a orienter les spins dans les directions voulues (polarisation). (cf équations de Ginzburg-Landau).

Mesure de Gibbs $\longrightarrow$ image par la transformation de « blocs-spins »

(moyennisation des spins sur des boîtes de taille intermédiaire

$$1 \ll \delta / \gamma \ll diam(\Lambda)$$

variable ``spin'' $\longrightarrow$ variable « magnétisation ».

Les configurations d'équilibre, données approximativement par les points critiques de la fonctionnelle d'énergie libre ``multicanonique'', présentent à l'intérieur du réseau une configuration de vortex.

Multiplicité algébrique totale = le degré de vorticité sur le bord du domaine.

2. Cas quantique: spin½, Interaction entre plus proches voisins

Le système en volume finie est régie par le Hamiltonien:

$$H(\sigma) = -\frac{1}{4}\sum_{\langle i,j\rangle; i,j\in\Lambda}(\sigma_i^x \otimes \sigma_j^x + \sigma_i^y \otimes \sigma_j^y) + h\sum_j \sigma_j^z$$

(operateur sur $l^2(\Lambda) \otimes \mathbb{C}^2 \approx \mathbb{C}^{2N}$, $\mathrm{N}=|\Lambda|$)

avec

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$h \in \mathbb{R}$ =champ magnétique

Que faut-il entendre par la vorticité quantique?

Pour répondre a cette question on va encore favoriser l'apparition des « vortex » en polarisant les matrices de Pauli sur le bord $\partial\Lambda$ du domaine. La vorticité doit avoir un caractère matriciel et non vectoriel comme dans le cas classique.

En 1-d, les propriétés des systèmes quantiques de spin sur réseau sont bien comprises (chaine XY), grâce à la transformation de Jordan-Wigner.

Propriétés à l'équilibre (états KMS):E.Barouch & B.Fuchssteiner, E.Barouch & Mc-Coy, H.Araki …

Propriétés hors équilibre (NESS): W.Aschbacher & C.A.Pillet, …

En 2-d, pas de transformation de Jordan-Wigner.
Même pour des transformations approchées (E.Lieb, T.Schultz & D.Mattis …) on ne connait pas avec précision la dynamique engendrée par $A \to \delta(A) = i[H, A]$ sur l'algèbre des observables locales O, (matrices $2N \times 2N$ à coefficients complexes munie du *-produit) en volume infini.

On va donc se limiter ici a des simulations numériques sur réseau.

Le cas libre

L'analogue quantique en dimension finie de l'état de Gibbs à température inverse β est donne par la forme linéaire (état KMS)

$$\omega_\beta : O \to \mathbb{C} \qquad \omega_\beta(A) = \frac{Tr(e^{-\beta H} A)}{Tr(e^{-\beta H})}$$

On désigne par $\hat{O} \subset O$ la sous-algèbre des matrices diagonales par blocs 2×2 (fonctions à un point supportées aux sites $i \in \Lambda$)

et $\hat{O}_{\mathbb{R}} \subset \hat{O}$ une sous-algèbre réelle, de dimension $4N$.

Exemple: 1. La sous-algèbre « canonique » engendrée par les matrices:

$(A^i)_{i\in\Lambda}$, $A^i = (A^i_{jk})_{1\leq j,k\leq 2}$ dont tous les blocs diagonaux de taille 2×2 sont nuls à l'exception de celui attaché au site i et qui vaut:

$$A^i_{jk} = \delta_{jk} \in \{\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}\}$$

2. $\hat{O}_{\mathbb{R}}$ est la sous-algèbre en engendrée par les matrices $(A^i)_{i\in\Lambda}$
avec $A^i_{jk} = a_{jk} \in \{I, i\sigma^x, i\sigma^y, i\sigma^z\}$ (matrices de Pauli)

On munit O du produit scalaire $(A \mid B) = Tr(B^* A)$

Si $\delta = (A^i_{jk})_{1\le i\le N, 1\le j,k\le 2}$ comme ci-dessus est une base (B.O.N) de $\hat{O}_{\mathbb{R}}$, on considère les composantes $\omega_\beta(A^i_{jk})$ de la forme linéaire ω_β dans sa base duale.
En chaque site i, $(\omega_\beta(A^i_{jk}))_{1\le j,k\le 2}$ est donc un VECTEUR de $\mathbb{R}^4$ auquel on va associer, modulo le choix d'une numérotation des coordonnées, le même en chaque site, une MATRICE 2×2

Définition 1:

Fixons le choix de la base canonique δ. On appelle *matrice de vorticité* au site i, relative à la base δ, et à la température inverse β, la matrice symétrique

$$\Omega^i_\beta(\delta)=\begin{pmatrix}\omega_\beta(A^i_{11}) & \omega_\beta(A^i_{12})\\ \omega_\beta(A^i_{21}) & \omega_\beta(A^i_{22})\end{pmatrix}$$

La matrice $\Psi^i_\beta(\delta)=\Omega^i_\beta(\delta)-Tr(\Omega^i_\beta(\delta))Id$ est appelée matrice de vorticité réduite au site i.

Exemple: $\Lambda=\{1,2\}$ est un réseau à deux sites. On trouve

$$\Psi^1_\beta(\delta)=-\Psi^2_\beta(\delta)=\frac{1}{4}\tanh^2\frac{\beta}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Pour des réseaux plus grands, on donne des valeurs numériques à β
On oubliera le facteur de normalisation $Tr(e^{-\beta H})$.

<u>Observation:</u> Pour toute B.O.N de O_R obtenue comme N copies identiques d'une B.O.N b de $\mathbb{R}^4$, il existe une numérotation $(b_{jk})_{1\leq j,k\leq 2}$ de b telle que

$$i)\forall i\in\Lambda \quad (\Psi^i_\beta(b))^2=\lambda^i_\beta(b)\,Id \qquad \lambda^i_\beta(b)\geq 0$$

$$ii)\forall i\in\Lambda \quad \det(\Psi^i_\beta(b))\leq 0$$

On a défini $\Omega^i_\beta(b)$ de façon analogue à $\Omega^i_\beta(\delta)$
Les matrices $\Psi^i_\beta(b)$ sont donc des matrices de similitude indirecte.
cette propriété sera toujours vérifiée.

Définition 2:

On dira que $i \in \Lambda$ est un *vortex* ssi pour une B.O.N b de $\hat{O}_{\mathbb{R}}$, $\Psi^{i}{}_{\beta}(b)$ admet une valeur propre nulle, ou bien deux valeurs propres égales ou opposées. On appelle *régulières* les matrices de vorticité qui ne sont pas des vortex

On observe qu'il on est de même pour toute autre B.O.N.

Le cas libre est complètement dégénère pour les petits réseaux au sens où tout les points sont des vortex (aux effets de bords près)

On peut toutefois s'attendre à ce que de « vrais vortex » à la Kosterlitz Thouless, apparaissent spontanément dans la limite thermodynamique.

Classes d'équivalence des B.O.N

1. La base canonique δ, Si $b \in [\delta]$, alors $\Omega^i_\beta(b)$ a une valeur propre double aux vortex.
2. La base ψ , où

$$\psi_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \psi_{12}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \psi_{21}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \psi_{22}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

si $b \in [\psi]$, alors $\Omega^i_\beta(b)$ a deux valeurs propres opposées aux vortex, et donc $\Omega^i_\beta(b)=\psi^i_\beta(b)$

3. La base χ, où

$$\chi_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \quad \chi_{12}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \chi_{21}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix} \quad \chi_{11}=\frac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

Si $b \in [\chi]$, alors $\Omega^i_\beta(b)$ a une valeur propre nulle aux vortex.

Cas d'une polarisation sur le bord du réseau.

On complète à présent le réseau par un environnement $\partial\Lambda\subset\mathbb{Z}^2$ (constitué d'une ou plusieurs enceintes). Sur lequel les matrices de Pauli sont polarisées dans des directions $(\theta_j)_{j\in\partial\Lambda}$

Dans l'expression de H défini sur $\Lambda\bigcup\partial\Lambda$, lorsque $i\in\partial\Lambda$, on remplace σ_i par $\sigma_i(\theta_i)=\pi_{\theta_i}\sigma_i\pi_{\theta_i}$ où π_{θ_i} est le projecteur orthogonal dans la direction $\begin{pmatrix}\cos(\theta_i)\\ \sin(\theta_i)\end{pmatrix}$

Ainsi $\sigma_i^x(\theta_i)=(\sin(2\theta_i)\pi_{\theta_i}$, $\sigma_i^y(\theta_i)=0$

Comme dans le cas libre on fait la même observation sur la nature des matrice de vorticité, mais de plus les vortex sont isoles, et on peut déterminer la monodromie de l'application $i\to\Psi^i_\beta(b)$ par rapport à ces points, qui ne dépend pas du choix de la base b

Exemple1: $|\Lambda|=5,\ |\partial\Lambda|=8$, polarisation radiale sur le bord.

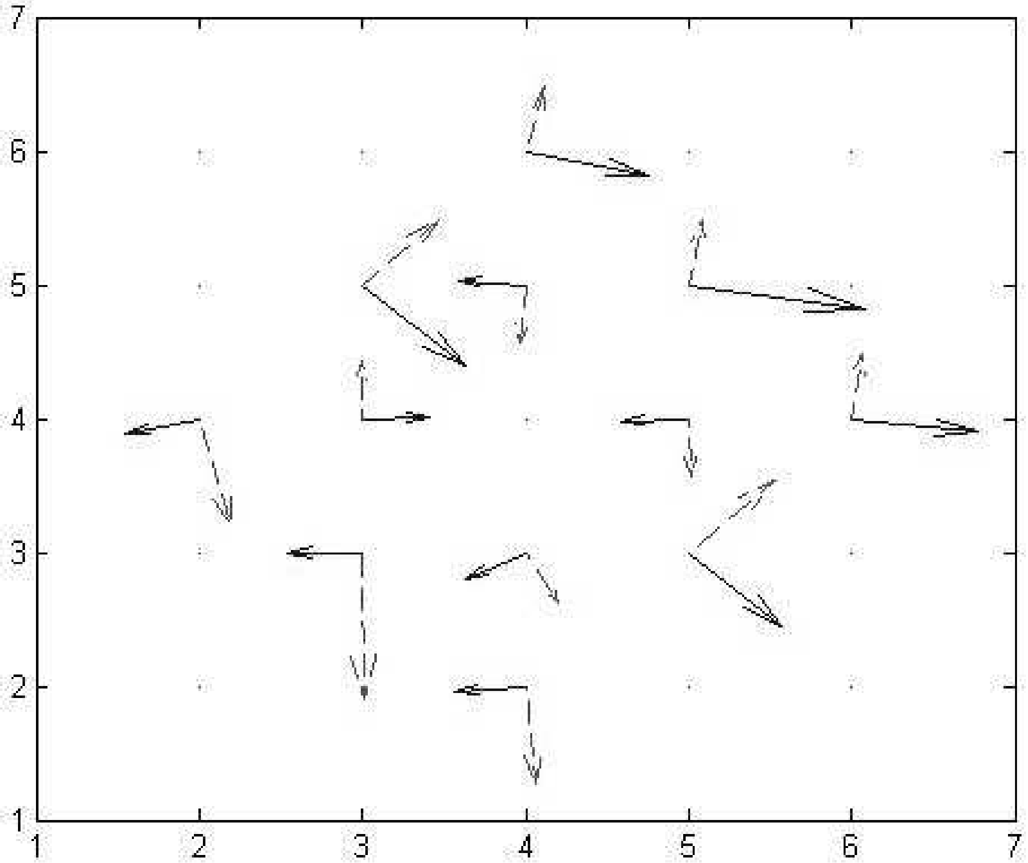
Ce modèle est soluble exactement, car on connaît le spectre de *H*

$$spec(H)=\left\{0(14),\ \pm\lambda_1=\pm\sqrt{17+\sqrt{257}}/4(2),\ \pm\lambda_2=\pm\sqrt{2}/4(2),\ \pm\lambda_1=\pm\sqrt{17-\sqrt{257}}/4(2)\right\}$$

La matrice de vorticité (relative à la base canonique) s'exprime en fonction de $\cosh(\beta\lambda_1),\quad \cosh(\beta\lambda_2),\quad \cosh(\beta\lambda_3)$.

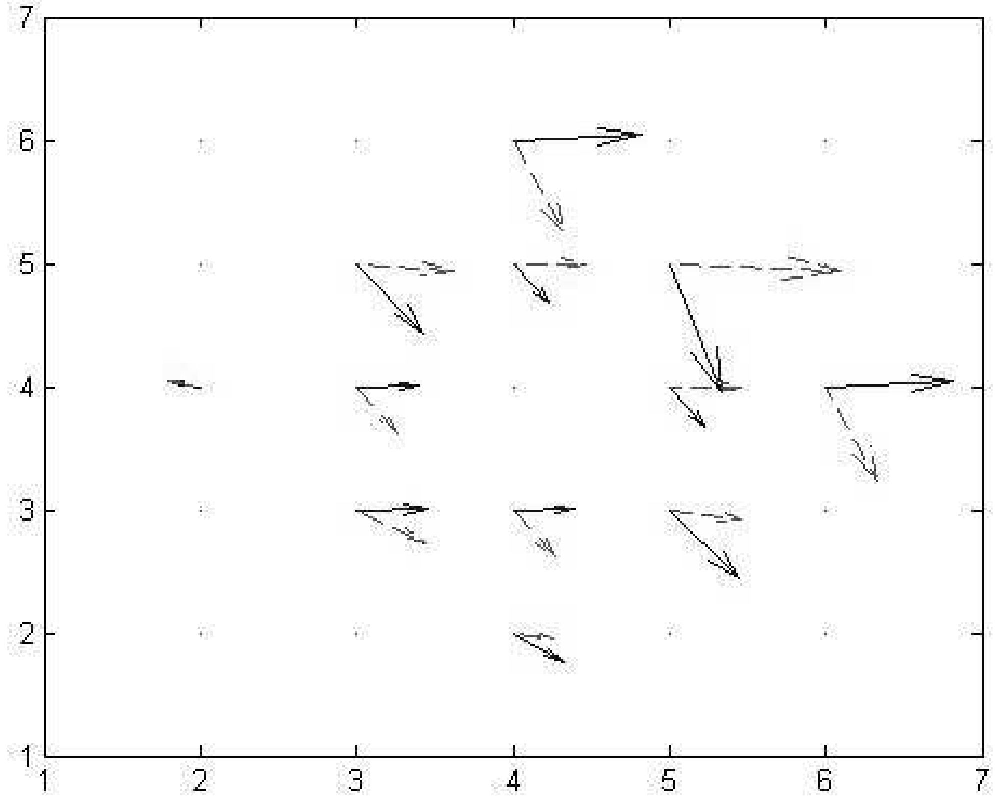
A toute température la matrice $\Psi^0_\beta(\delta)=0$(au centre) et en les autres sites, les matrices $\Omega^i_\beta(\delta)$ sont régulières. $\Psi^i_\beta(\delta)$ est toujours la matrice d'une similitude indirecte du plan.

Exemple2



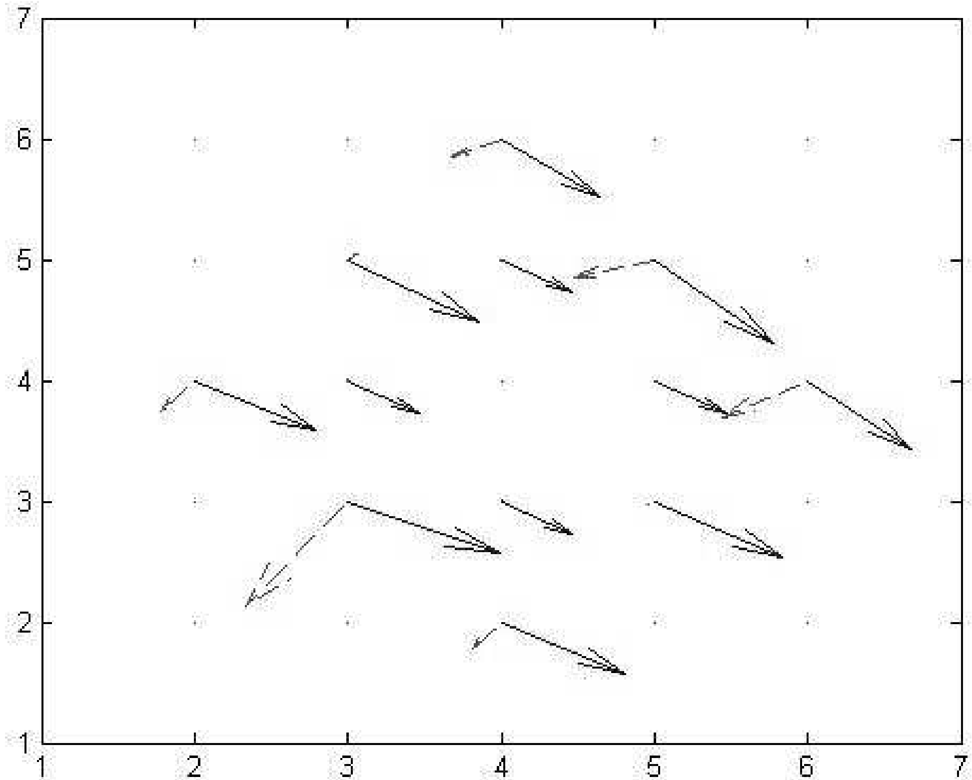
$|\ \Lambda\ |= 13$, $|\partial\Lambda|$=28 (2 enceintes), $\beta\ = 1$, base δ

<u>Exemple3</u>



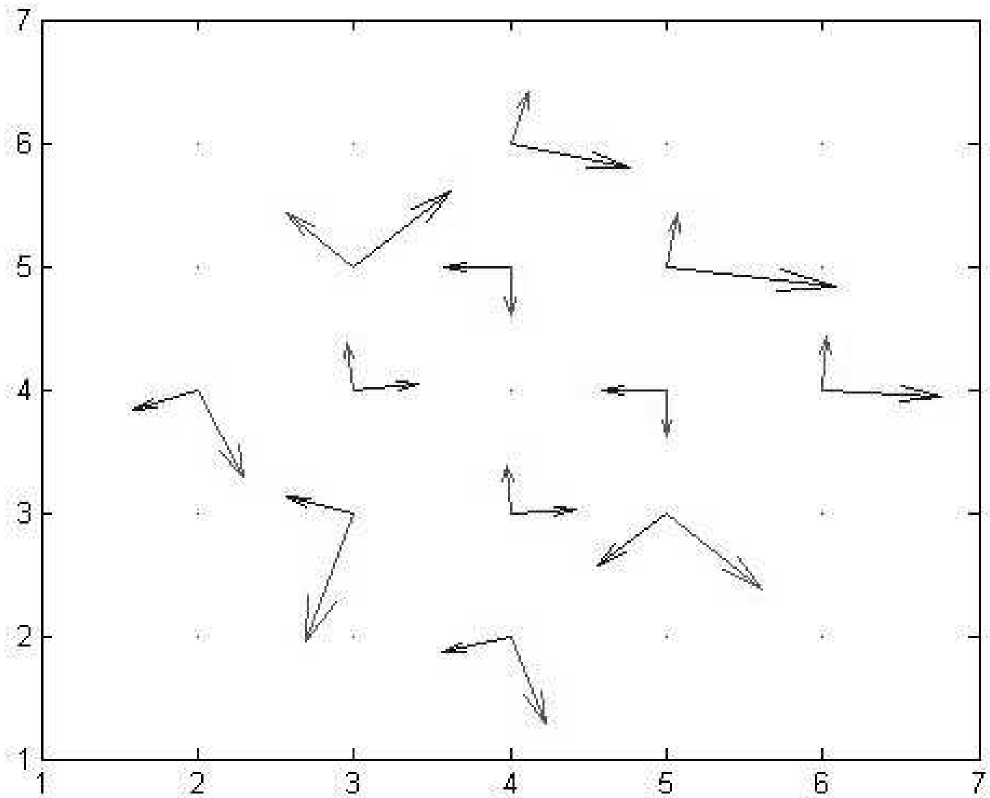
$|\ \Lambda\ |= 13$, $|\partial\Lambda|=28$ (2 enceintes), $\beta\ = 1$, base ψ

Exemple4



$|\ \Lambda\ |= 13$, $|\partial\Lambda|=28$ (2 enceintes), $\beta\ = 1$, base χ

Exemple5



$|\ \Lambda\ |= 13$, $|\partial\Lambda|=48$ (3 enceintes), $\beta' = 1$, base δ'

Monodromie

On commence par définir le (carré du) degré a l'infini d'une application différentiable définie sur $\mathbb{R}^2$à valeurs dans les matrices de similitude, uniformément elliptiques à l'infini par

$$(\deg_\infty(M))^2 = \det \frac{1}{2\pi} \int_{|x|=R} M^{-1}(x)\, dM(x), \qquad R \gg 0$$

et on vérifie que

$$\det \frac{1}{2\pi} \int_{|x|=R} M^{-1}(x)\, dM(x) = \det \frac{1}{2\pi} \int_{|x|=R} dM(x) M^{-1}(x)$$

On a $(\deg_\infty(M))^2 \in \{0,1,4,9,...\}$

De la même manière, on définit le carré de son degré local (ou défaut topologique) $(\deg_\infty(M))^2$ pourvu que $M(x)$ soit inversible pour $x \neq x_0$ en intégrant sur un petit contour autour de x_0

Pour une application définie sur le réseau $\mathbb{Z}^2$, on peut donner un sens à l'intégrale en remplaçant de façon usuelle la différentielle par des différences finies.

On s'intéresse alors à la monodromie de $i \to \Psi^i{}_\beta(b)$ dans la limite $\Lambda \to \infty$ en fonction de n

On vérifie que $n^2 = (\deg(\Psi^i{}_\beta(b))|_{\partial\Lambda})^2$

On s'attend d'autre part à ce que la vorticité algébrique totale soit conservée, mais il est clair que la seule connaissance du carré du degré ne suffit pas à caractériser la monodromie des matrices de vorticité, il faut encore « suivre» la base des vecteurs propres de $\Psi^i{}_\beta(b)$ en fonction du site i (les 2 valeurs propres semblent s'échanger en oscillant d'un site à l'autre.)