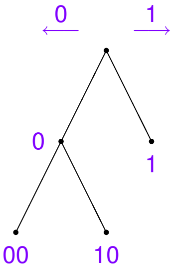
Schéma de renouvellement et unicité pour des chaînes à mémoire variable non bornée

Alexsandro Gallo

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

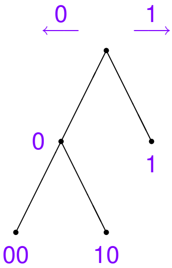
Journées de Probabilité 2007

Exemple d'arbre



Alphabet fini $A = \{0, 1\}$

Exemple d'arbre



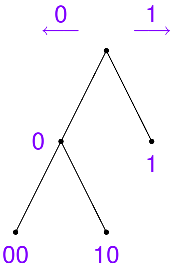
Alphabet fini $A = \{0, 1\}$

Appelons cet arbre τ.

Nous pouvons écrire cet arbre comme l'ensemble de ses feuilles: $\tau = \{00, 10, 1\}$.

Les feuilles sont appelées des contextes

Définition d’un arbre de contextes



Alphabet fini $A = \{0, 1\}$

Appelons cet arbre τ.

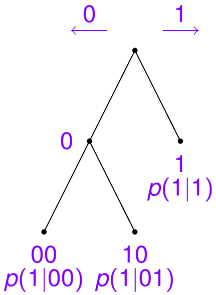
Nous pouvons écrire cet arbre comme l’ensemble de ses feuilles: $\tau = \{00, 10, 1\}$.

Les feuilles sont appelées des contextes

- Nous appelerons un arbre un ensemble de contextes qui vérifient $\longrightarrow$ propriété du suffixe

  $\longrightarrow$ complétude.

Définition d'un arbre de contextes probabiliste



Alphabet fini $A = \{0, 1\}$

Appelons cet arbre τ.

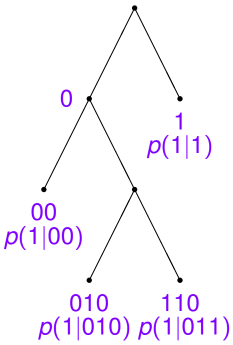
Nous pouvons écrire cet arbre comme l'ensemble de ses feuilles: $\tau = \{00, 10, 1\}$.

Les feuilles sont appelées des contextes

- Nous appelerons un arbre un ensemble de contextes qui vérifient:
  - $\rightarrow$ propriété du suffixe
  - $\rightarrow$ complétude.

- un arbre probabiliste est une paire (τ, P) où P est un ensemble de probabilités de transition: $P = \{p(1|\omega), \omega \in \tau\}$.

Construction d'une chaîne stochastique à partir d'un arbre (τ, P)

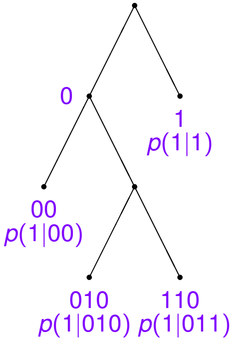


Construisons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ utilisant (τ, P)

sur un passé donné:

$$x_{-\infty}^{-1} = \ldots 01010$$

Construction d'une chaîne stochastique à partir d'un arbre (τ, P)



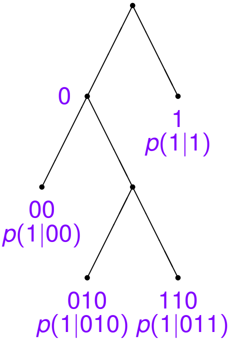
Construisons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ utilisant (τ, P)

sur un passé donné:

$$x_{-\infty}^{-1} = \ldots 01010$$

$$\text{contexte } c_\tau(x_{-\infty}^{-1}) = 010$$

Construction d'une chaîne stochastique à partir d'un arbre (τ, P)



Construisons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ utilisant (τ, P)

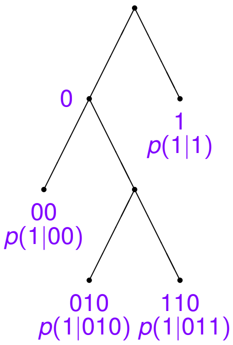
sur un passé donné:

$x_{-\infty}^{-1} = \ldots 01010$

contexte $c_\tau(x_{-\infty}^{-1}) = 010$

$x_0 = 1$ apparait avec probabilité $p(1|010)$

Construction d'une chaîne stochastique à partir d'un arbre (τ, P)



Construisons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ utilisant (τ, P)

sur un passé donné:

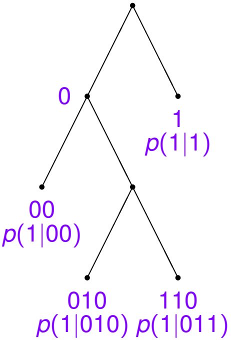
$x_{-\infty}^{0} = \ldots 010100$

contexte $c_\tau(x_{-\infty}^{-1}) = 010$

$x_0 = 1$ apparait avec probabilité $p(1|010)$

supposons qu'il apparaisse le symbole 0

Construction d'une chaîne stochastique à partir d'un arbre (τ, P)



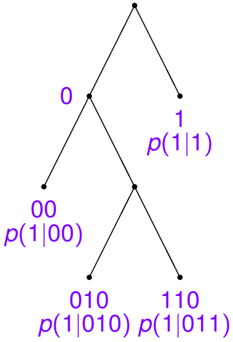
Construisons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ utilisant (τ, P)

sur un passé donné:

$$x_{-\infty}^{0} = \ldots 010100$$

$$\text{contexte } c_\tau(x_{-\infty}^{0}) = 00$$

Construction d'une chaîne stochastique à partir d'un arbre (τ, P)



Construisons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ utilisant (τ, P)

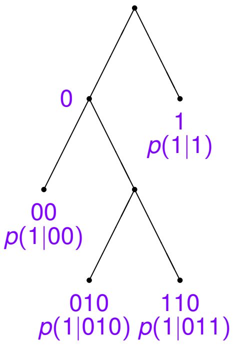
sur un passé donné:

$$x_{-\infty}^{0} = \ldots 010100$$

contexte $c_\tau(x_{-\infty}^{0}) = 00$

$x_1 = 1$ apparait avec probabilité $p(1|00)$

Construction d'une chaîne stochastique à partir d'un arbre (τ, P)



Construisons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ utilisant (τ, P)

sur un passé donné:

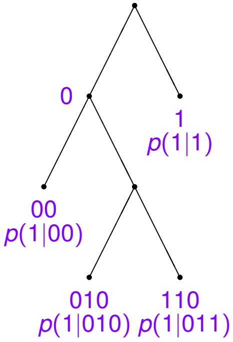
$x_{-\infty}^{1} = \ldots 0101001$

contexte $c_\tau(x_{-\infty}^{0}) = 00$

$x_1 = 1$ apparait avec probabilité $p(1|00)$

supposons qu'il apparaisse le symbole 1

Construction d’une chaîne stochastique à partir d’un arbre (τ, P)



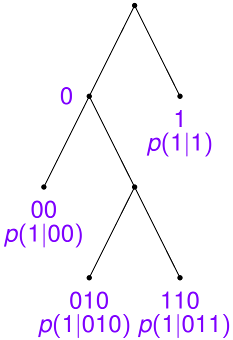
Construisons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ utilisant (τ, P)

sur un passé donné:

$$x_{-\infty}^{1} = \ldots 0101001$$

contexte $c_\tau(x_{-\infty}^{1}) = 1$

Construction d'une chaîne stochastique à partir d'un arbre (τ, P)



Construisons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ utilisant (τ, P)

sur un passé donné:

$x^{1}_{-\infty} = \ldots 0101001$

contexte $c_\tau(x^{1}_{-\infty}) = 1$

$x_2 = 1$ apparait avec probabilité $p(1|1)$

...etc... Ainsi se construit une chaîne de mémoire varia

Chaîne de mémoire variable et non bornée

- C'est le cas ou la taille des contextes est finie, mais non bornée.

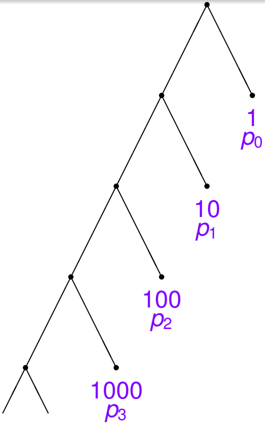
Chaîne de mémoire variable et non bornée

- C'est le cas ou la taille des contextes est finie, mais non bornée.
- Il s'agit alors d'une chaîne d'ordre infini.

Chaîne de mémoire variable et non bornée

- C’est le cas ou la taille des contextes est finie, mais non bornée.
- Il s’agit alors d’une chaîne d’ordre infini.
- L’exemple le plus simple est la chaîne lacunaire.

Exemple de chaîne à mémoire variable et non bornée: la chaîne lacunaire



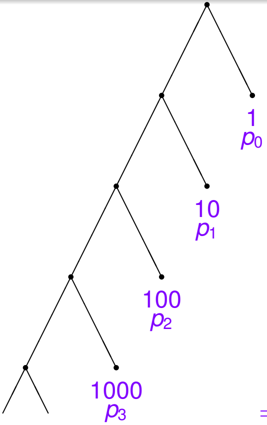
Les contextes sont de la forme

$\tau = \cup_{k=0}^{+\infty} 10^k$.

Les probabilités de transition sont de la forme

$p(1|0^k 1) = p_k, k \in \mathbb{N}$

Exemple de chaîne à mémoire variable et non bornée: la chaîne lacunaire



Les contextes sont de la forme

$\tau = \cup_{k=0}^{+\infty} 10^k$.

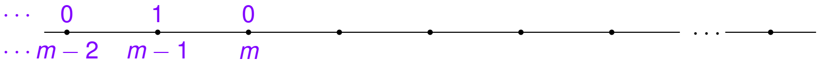
Les probabilités de transition sont de la forme

$p(1|0^k1) = p_k, k \in \mathbb{N}$

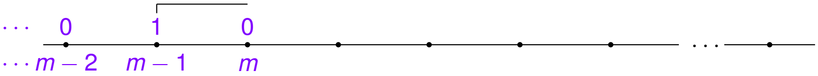
Remarque: quand il apparait un 1, le processus "oublie"le passé.

$\Longrightarrow$ les instants où apparait un 1 sont appelés temps de renouvellement.

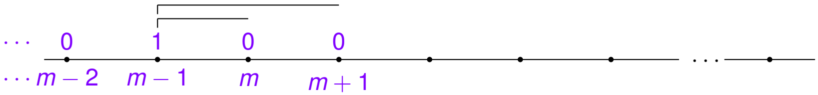
La chaîne lacunaire est en fait un processus de renouvellement: supposons connu $x_{-\infty}^{m}$



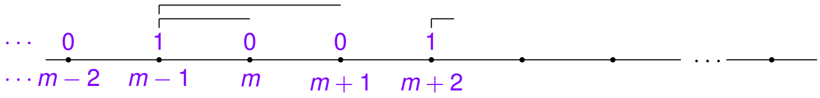
La chaîne lacunaire est en fait un processus de renouvellement



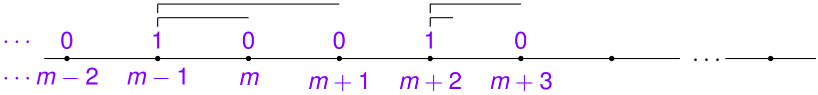
La chaîne lacunaire est en fait un processus de renouvellement



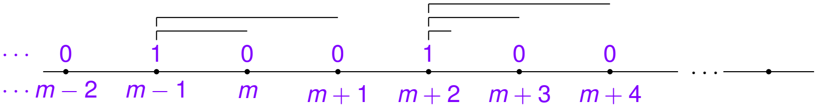
La chaîne lacunaire est en fait un processus de renouvellement



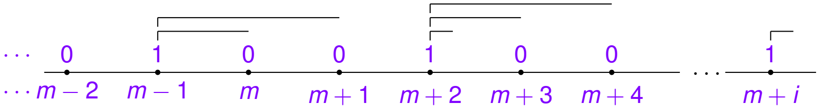
La chaîne lacunaire est en fait un processus de renouvellement



La chaîne lacunaire est en fait un processus de renouvellement

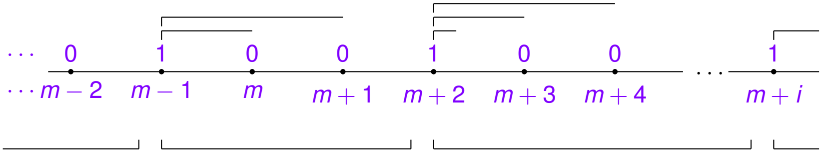


La chaîne lacunaire est en fait un processus de renouvellement



La chaîne lacunaire est en fait un processus de renouvellement

Nous pouvons décomposer la réalisation en blocs indépendants, et également distribués.



Il suffit donc que les $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ permettent l'apparition d'une infinité de 1's, et nous obtenons un processus de renouvellement.

Problématique abordée:

Est-ce qu'on peut généraliser cette propriété à d'autre arbres de contextes probabilistes?

Temps de renouvellement associé à un contexte

Définition:
Soit (τ, P) un arbre probabiliste
$\omega \in \tau$ un contexte
$x_{-\infty}^{+\infty}$ une réalisation de (τ, P)
t est un temps de renouvellement en relation à ω si

- $x_t^{t+|\omega|-1} = \omega$
- $\forall n \geq t, c_\tau(x_{-\infty}^n) \subset x_t^n$

Références sur les schéma de renouvellement

- S. P. Lalley. Regeneration representation for one-dimensional Gibbs states. *Ann. Prob.*, 14:1262-71, 1986.
- F. Comets, R. Fernández, and P. A. Ferrari. Processes with long memory: Regenerative construction and perfect simulation. *Ann. Appl. Probab.* vol. 12 3:921-943, 2002.
  - Schéma de renouvellement non visible.
- Esteves, G., Galves (en préparation)
  - Schéma de renouvellement visible.

Sur la représentation des arbres de taille non borée

N'importe quel arbre τ peut être décomposé

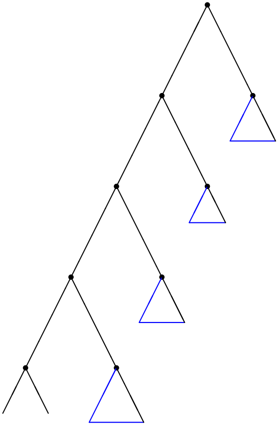
sous la forme

$$\tau = \cup_{k \geq 0} \hat{\tau}^k 10^k$$

où $\hat{\tau}^k$ sont des arbres de contexte,

non necessairement de taille bornée.

Sur la représentation des arbres de taille non borée



N'importe quel arbre τ peut être décomposé

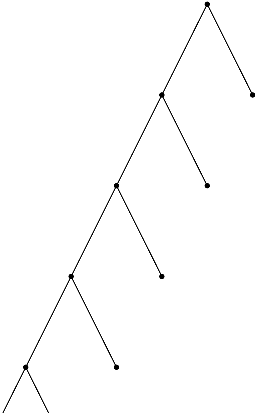
sous la forme

$$\tau = \cup_{k \geq 0} \hat{\tau}^k 10^k$$

où $\hat{\tau}^k$ sont des arbres de contexte,

non necessairement de taille bornée.

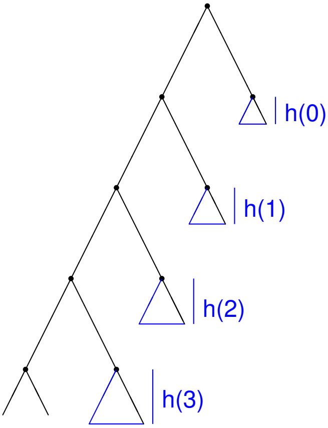
Classe d'arbres que nous considerons



Nous avons vu que la chaîne lacunaire est un processus de renouvellement:

$$\tau = \cup_{k \geq 0} 10^k$$

Classe d'arbres que nous considerons



Nous avons vu que la chaîne lacunaire est un processus de renouvellement:

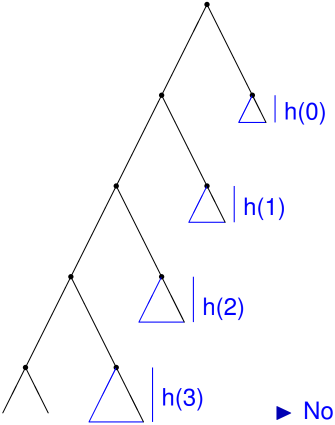
$$\tau = \cup_{k \geq 0} 10^k$$

Généralisons en ajoutant à chaque contextes de la forme 10^k, un arbre $\hat{\tau}^k$ de profondeur $h(k)$:

$$\tau = \cup_{k \geq 0} \hat{\tau}^k 10^k$$

avec $h(k)$ non-decrescente et non bornée.

Problème abordé dans ce talk



Nous avons vu que la chaîne lacunaire est un processus de renouvellement:

$$\tau = \cup_{k\geq 0} 10^k$$

Généralisons en ajoutant à chaque contextes de la forme 10^k, un arbre $\hat{\tau}^k$ de profondeur $h(k)$:

$$\tau = \cup_{k\geq 0} \hat{\tau}^k 10^k$$

avec $h(k)$ non-decroissante et non bornée.

- Nous cherchons une condition sur $h(k)$ pour obtenir un schéma de renouvellement avec ce nouvel arbre.

Le théorème

Théorème:
Si (τ, P) verifie:

Le théorème

Théorème:
Si (τ, P) verifie:

- regularité: $\forall \omega \in \tau, \epsilon < p(1|\omega) < 1 - \epsilon$

Le théorème

Théorème:

Si (τ, P) verifie:

- regularité: $\forall \omega \in \tau, \epsilon < p(1|\omega) < 1 - \epsilon$
- $h(k) \leq \left(\frac{1}{1-\epsilon}\right)^{\frac{k-1}{1+\delta}}$, δ constante positive quelconque fixée,

Le théorème

Théorème:

Si (τ, P) verifie:

- regularité: $\forall \omega \in \tau, \epsilon < p(1|\omega) < 1 - \epsilon$
- $h(k) \leq \left(\frac{1}{1-\epsilon}\right)^{\frac{k-1}{1+\delta}}$, δ constante positive quelconque fixée,

alors....

Le théorème

Théorème:
Si (τ, P) verifie:

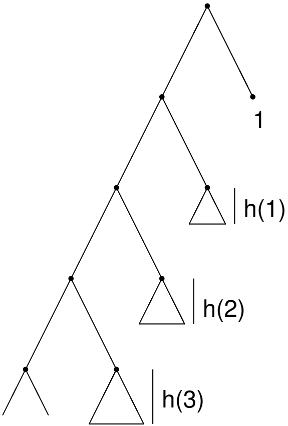
- regularité: $\forall \omega \in \tau, \epsilon < p(1|\omega) < 1 - \epsilon$
- $h(k) \leq \left(\frac{1}{1-\epsilon}\right)^{\frac{k-1}{1+\delta}}$, δ constante positive quelconque fixée,

alors.... pour tout $\omega \in \tau$, il existe une infinité d'instants

$$\ldots < \sigma_0^\omega \leq 0 < \sigma_1^\omega < \sigma_2^\omega \ldots$$

qui sont des temps de renouvellement pour la réalisation de (τ, P) en relation à ω.

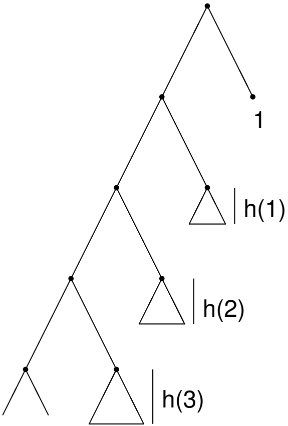
Une simplification



Nous considererons le cas où $h(0) = 0$

c'est à dire que 1 est un contexte.

Une simplification



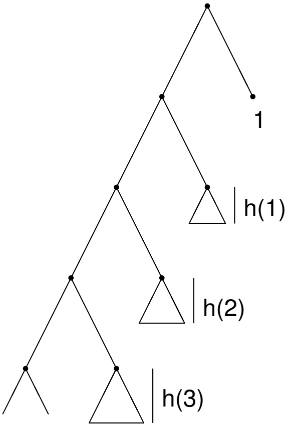
Nous considererons le cas où $h(0) = 0$

c'est à dire que 1 est un contexte.

Nous cherchons un schéma de renouvellement

en relation au contexte 1.

Difference avec la chaîne lacunaire



Les petits arbres font que le contexte 1 peut être dépassé par l'apparition de suffisament de 0's.

Définissons un processus auxiliaire

Nous appelons $x_{-\infty}^{+\infty}$ la chaîne construite utilisant l'arbre (τ, P).
Supposons que $x_m = 1$.
Nous définissons $(D_i^m)_{i \geq 0}$ qui compte le nombre de 0's qui doivent apparaitre à partir du temps $m + i$ pour rencontrer un contexte qui aille "voir"avant le temps m:

$$D_i^m = min\{j \geq 0 : |c_\tau(x_{-\infty}^{m-1} 1 x_{m+1}^{m+i} 0^j)| > j + i + 1\}$$

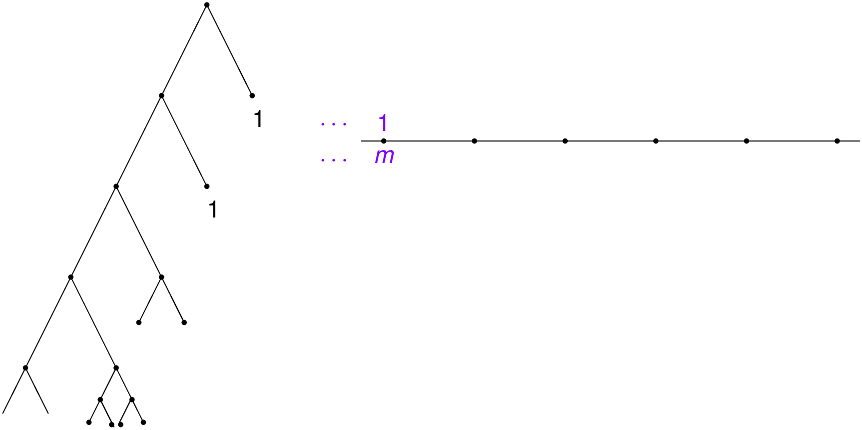
Définissons un processus auxiliaire

Nous appelons $x_{-\infty}^{+\infty}$ la chaîne construite utilisant l'arbre (τ, P).
Supposons que $x_m = 1$.
Nous définissons $(D_i^m)_{i\geq 0}$ qui compte le nombre de 0's qui doivent apparaitre à partir du temps $m+i$ pour rencontrer un contexte qui aille "voir"avant le temps m:

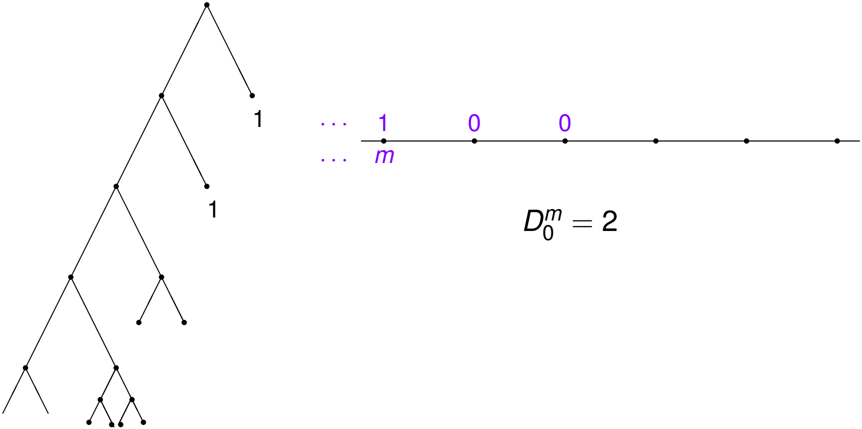
$$D_i^m = min\{j \geq 0 : |c_\tau(x_{-\infty}^{m-1} 1 x_{m+1}^{m+i} 0^j)| > j+i+1\}$$

- La définition de ce processus est la clef de la preuve!!!

Pour comprendre le processus (D^m) faisons un exemple

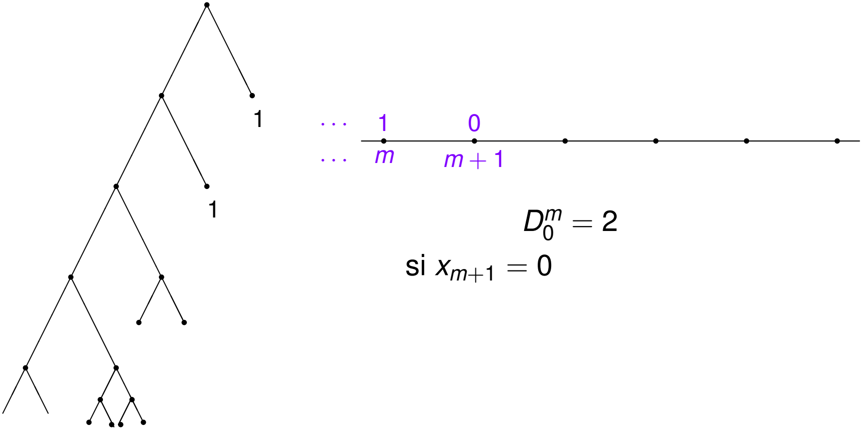


Pour comprendre le processus (D^m) faisons un exemple



$$D_0^m = 2$$

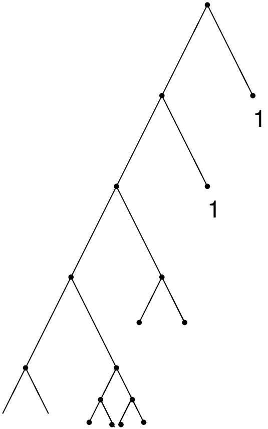
Pour comprendre le processus (D^m) faisons un exemple

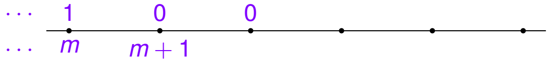


$$D_0^m = 2$$

si $x_{m+1} = 0$

Pour comprendre le processus (D^m) faisons un exemple



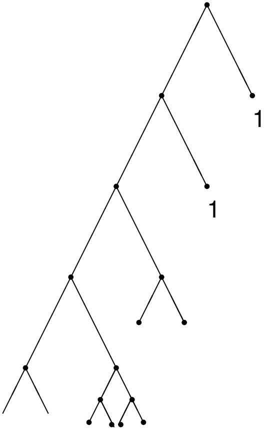


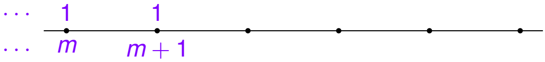
$$D_0^m = 2$$

$$\text{si } x_{m+1} = 0$$

$$D_1^m = 1$$

Pour comprendre le processus (D^m) faisons un exemple





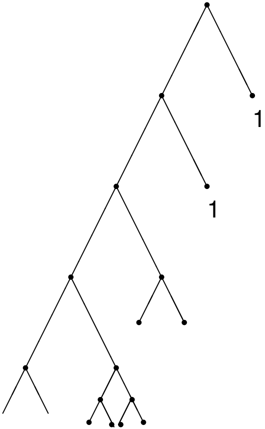
$$D_0^m = 2$$

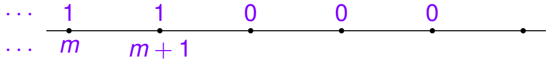
si $x_{m+1} = 0$

$$D_1^m = 1$$

si $x_{m+1} = 1$

Pour comprendre le processus (D^m) faisons un exemple





$$D_0^m = 2$$

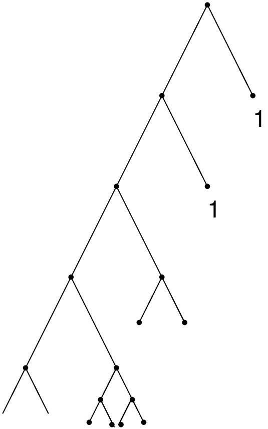
si $x_{m+1} = 0$

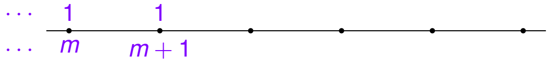
$$D_1^m = 1$$

si $x_{m+1} = 1$

$$D_1^m = 3$$

Pour comprendre le processus (D^m) faisons un exemple





$$D_0^m = 2$$

si $x_{m+1} = 0$

$$D_1^m = 1$$

si $x_{m+1} = 1$

$$D_1^m = 3$$

- $\dots D_i^m = g_i(D_{i-1}^m, x_{m+i})$

Une définition importante pour comprendre comment se comporte le processus (D^m)

Définition:

$$a(i) = min\{j \geq 0 : h(j) \geq i\}.$$

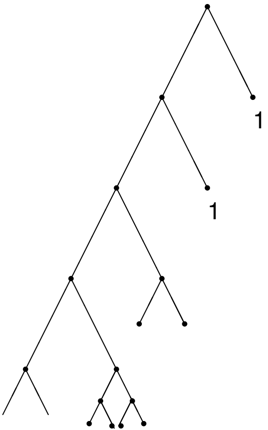
Une définition importante pour comprendre comment se comporte le processus (D^m)

Définition:

$$a(i) = min\{j \geq 0 : h(j) \geq i\}.$$

Signification:
$a(i)$ "compte"le nombre de "0"qu'il faut relier à la racine de notre arbre, pour trouver un arbre $\hat{\tau}^k$ de taille superieure ou égale à i

Exemple pour $a(i)$



Dans le cas de cet arbre nous avons:

$$a(1) = 2,\ a(2) = 3...$$

Une petit dernier pour comprendre le comportement de (D^m)...

Si $D^m_{i-1} = d \geq 1$
Cela veut dire qu'il faut ajouter d 0's à partir du temps $m + i - 1$ pour trouver un contexte qui depasse le temps m. Deux cas se présentent:

Une petit dernier pour comprendre le comportement de (D^m)...

Si $D^m_{i-1} = d \geq 1$
Cela veut dire qu'il faut ajouter d 0's à partir du temps $m + i - 1$ pour trouver un contexte qui depasse le temps m. Deux cas se présentent:

- ou $x_{m+i} = 0$
  Dans quel cas il ne manque plus que $(d - 1)$ 0's à mettre pour dépasser le temps m: $D^m_i = d - 1$

Une petit dernier pour comprendre le comportement de (D^m)...

Si $D^m_{i-1} = d \geq 1$
Cela veut dire qu'il faut ajouter d 0's à partir du temps $m + i - 1$ pour trouver un contexte qui depasse le temps m. Deux cas se présentent:

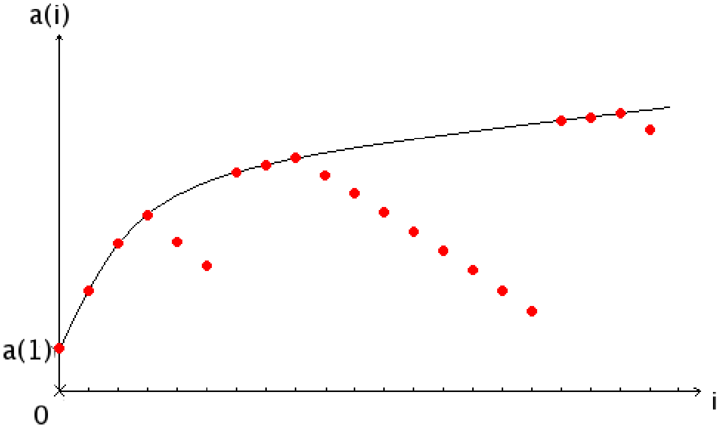
- ou $x_{m+i} = 0$
  Dans quel cas il ne manque plus que $(d - 1)$ 0's à mettre pour dépasser le temps m: $D^m_i = d - 1$
- ou $x_{m+i} = 1$
  Dans quel cas il faut tout recomencer!!!!!: $D^m_i = a(i + 1)$.

Une petit dernier pour comprendre le comportement de (D^m)...

Si $D^m_{i-1} = d \geq 1$
Cela veut dire qu'il faut ajouter d 0's à partir du temps $m+i-1$ pour trouver un contexte qui depasse le temps m. Deux cas se présentent:

- ou $x_{m+i} = 0$
  Dans quel cas il ne manque plus que $(d-1)$ 0's à mettre pour dépasser le temps m: $D^m_i = d-1$
- ou $x_{m+i} = 1$
  Dans quel cas il faut tout recomencer!!!!!: $D^m_i = a(i+1)$.
- LA, JE FAIS UN DESSIN AU TABLEAU POUR ILLUSTRER CE SLIDE, C'EST PLUS DYNAMIQUE...

représentation graphique du processus (D^m)



Expression de (D^m)

$$D_i^m = g_i(D_{i-1}^m, x_{m+i}) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_{i-1}^m = 0 \\ D_{i-1}^m - 1 & \text{if } D_{i-1}^m \geq 1 \text{ and } x_{m+i} = 0, \\ a(i+1) & \text{if } D_{i-1}^m \geq 1 \text{ and } x_{m+i} = 1 \end{cases}$$

Expression de (D^m)

$$D_i^m = g_i(D_{i-1}^m, x_{m+i}) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_{i-1}^m = 0 \\ D_{i-1}^m - 1 & \text{if } D_{i-1}^m \geq 1 \text{ and } x_{m+i} = 0, \\ a(i+1) & \text{if } D_{i-1}^m \geq 1 \text{ and } x_{m+i} = 1 \end{cases}$$

Remarque:
C'est la forme de notre arbre (il ne branche que du coté des "0") qui fait que nous obtenons cette éxpression.

Transformation du problème

$\{m$ est un temps de renouvellement$\}$

Transformation du problème

$\{m$ est un temps de renouvellement$\}$

$$=$$

$\{$le processus (D^m) ne vaut jamais $0\}$

Transformation du problème

$$\{m \text{ est un temps de renouvellement}\}$$

$$=$$

$$\{\text{le processus } (D^m) \text{ ne vaut jamais } 0\}$$

$$=$$

$$\cap_{i\geq 0}\{D_i^m \geq 1\}$$

Fin de la preuve

- La condition $\epsilon < p(1|\omega) < 1 - \epsilon$ nous assure l'apparition d'une infinité de 1.

Fin de la preuve

- La condition $\epsilon < p(1|\omega) < 1 - \epsilon$ nous assure l'apparition d'une infinité de 1.
- La condition sur $h(k)$ nous garantit que $P(\cap_{i\geq 0}\{D_i^m \geq 1\}|x_m = 1) > \eta > 0 \Rightarrow$ $P(\text{m est un temps de renouvellement}|x_m = 1) > \eta > 0.$

Fin de la preuve

- La condition $\epsilon < p(1|\omega) < 1 - \epsilon$ nous assure l'apparition d'une infinité de 1.
- La condition sur $h(k)$ nous garantit que $P(\cap_{i\geq 0}\{D_i^m \geq 1\}|x_m = 1) > \eta > 0 \Rightarrow$ $P(\text{m est un temps de renouvellement}|x_m = 1) > \eta > 0.$

▶ dans les conditions du théorème il existe une infinité de temps de renouvellement.

Ce que dit le résultat

Les processus construit à partir de la classe d'arbre que nous considérons présentent un schéma de renouvellement, ce qui implique:

Ce que dit le résultat

Les processus construit à partir de la classe d'arbre que nous considérons présentent un schéma de renouvellement, ce qui implique:

- existence d'une mesure stationnaire pour notre processus

Ce que dit le résultat

Les processus construit à partir de la classe d'arbre que nous considérons présentent un schéma de renouvellement, ce qui implique:

- existence d'une mesure stationnaire pour notre processus
- unicité de cette mesure

Ce que dit le résultat

Les processus construit à partir de la classe d'arbre que nous considérons présentent un schéma de renouvellement, ce qui implique:

- existence d'une mesure stationnaire pour notre processus
- unicité de cette mesure
- simulation parfaite

Ce que dit le résultat

Les processus construit à partir de la classe d'arbre que nous considérons présentent un schéma de renouvellement, ce qui implique:

- existence d'une mesure stationnaire pour notre processus
- unicité de cette mesure
- simulation parfaite

▶ sans aucune condition sur les probabilités de transition!!!

Ce que dit le résultat

Les processus construit à partir de la classe d'arbre que nous considérons présentent un schéma de renouvellement, ce qui implique:

- existence d'une mesure stationnaire pour notre processus
- unicité de cette mesure
- simulation parfaite

► sans aucune condition sur les probabilités de transition!!!
mis à part la condition de régularité, qui est courante dans la literrature, et probablement pas nécessaire...

Une définition importante

Définition

Soit un arbre probabiliste (τ, P), nous appelons le taux de continuité la quantité suivante:

$$\beta_k := \max_{a \in A} \sup\{|p(a|w) - p(a|v)|; v, w \in \tau, v_{-k}^{-1} = w_{-k}^{-1}\}.$$

Une définition importante

Définition

Soit un arbre probabiliste (τ, P), nous appelons le taux de continuité la quantité suivante:

$$\beta_k := \max_{a \in A} \sup\{|p(a|w) - p(a|v)|; v, w \in \tau, v_{-k}^{-1} = w_{-k}^{-1}\}.$$

Dans la littérature, les critères d'existence et d'unicité sont du type:

$$\beta_k \xrightarrow{k \to \infty} 0 \Rightarrow \text{existence, (la continuité)}$$

$$\sum_{k \geq 0} \beta_k < +\infty \Rightarrow \text{unicité.}$$

Ce que nous en tirons

Ce résultat

- minimise l'importance de la notion de continuité dans l'etude des processus stochastique de mémoire infinie,

Ce que nous en tirons

Ce résultat

- minimise l'importance de la notion de continuité dans l'etude des processus stochastique de mémoire infinie,
- concerne une classe d'arbres qui n'est pas si restreinte: $h(k)$ peut croître jusqu'à exponenciellement,

Ce que nous en tirons

Ce résultat

- minimise l'importance de la notion de continuité dans l'etude des processus stochastique de mémoire infinie,
- concerne une classe d'arbres qui n'est pas si restreinte: $h(k)$ peut croître jusqu'à exponenciellement,
- nous donne des exemples où nous avons l'unicité sans schéma de renouvellement.

Théorème

Si (τ, P) *verifie:*

- $\forall \omega \in \tau, \frac{1}{e} < p(1|\omega) < 1 - \frac{1}{e}$
- $h(k) \geq \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{k-1}{1-\delta}}, \forall \delta > 0$ *(si petit soit-il),*

alors il n'y a pas de schéma de renouvellement.

Supposons que l'on se place dans les conditions de ce dernier théorème.

Supposons que l'on se place dans les conditions de ce dernier théorème.
Nous pouvons "jouer" sur les probabilités de transitions pour assurer l'unicité de la mesure stationnaire pour notre processus.

Supposons que l'on se place dans les conditions de ce dernier théorème.
Nous pouvons "jouer" sur les probabilités de transitions pour assurer l'unicité de la mesure stationnaire pour notre processus.
Par exemple, prenons:

$$\frac{1-\lambda_k}{2} \leq P(1|0^k 1 w^{(k)}) \leq \frac{1+\lambda_k}{2}, \forall w^{(k)} \in \hat{\tau}^k$$

où λ_k verifie

$$\lambda_0 = 1 - 2/e$$
$$\lambda_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$$
et est tel que $(\beta_k)_k$ est sommable.

Ce qu'il reste à faire

- 1. Affaiblir la condition sur les probabilités de transition,

Ce qu'il reste à faire

- 1. Affaiblir la condition sur les probabilités de transition,

$$\epsilon < p(1|w) < 1 - \epsilon, \forall w \in \tau$$

$$\Big\downarrow$$

$$p_k < p(1|w^{(k)}) < 1 - p_k, \forall w^{(k)} \in \hat{\tau}^k 10^k$$

où p_k irait vers 0 suffisement lentement.

Ce qu'il reste à faire

- 1. Affaiblir la condition sur les probabilités de transition,

$$\epsilon < p(1|w) < 1 - \epsilon, \forall w \in \tau$$

$$\Big\downarrow$$

$$p_k < p(1|w^{(k)}) < 1 - p_k, \forall w^{(k)} \in \hat{\tau}^k 10^k$$

où p_k irait vers 0 suffisement lentement.

- 2. Généraliser ces résultats à des arbres qui ne se branchent pas seulement du côté des 0.

FIN