# Comportement asymptotique de sommes de Cesàro aléatoires


Florian HECHNER

*I.R.M.A. Strasbourg*



10 Septembre 2007

# 1 Introduction

Soit $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et centrées, et $\mathbf{S}_n := \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n$.
Dans de nombreux problèmes concrets, en particulier la construction d'intervalles de confiance pour une moyenne, on a besoin d'informations précises sur la vitesse de convergence de $\frac{\mathbf{S}_n}{n}$ vers 0.

Ce problème a été étudié abondamment. On a, par exemple, le très joli résultat suivant :

**Theorème 1.1 (Hsu, Erdös, Robbins)** :
*Il y a équivalence entre*

1. $\mathbb{E}\mathbf{X}_1^2 < +\infty$ ;
2. $\forall t > 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right| > t\right) < +\infty.$

Des résultats de ce type expriment la "bonne vitesse de convergence" à l'aide des fonctions de répartition des $\frac{\mathbf{S}_n}{n}$.

Une autre façon naturelle d'exprimer une "bonne convergence" est de dire que des moyennes associées à la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ convergent "rapidement" vers 0.

Nous allons préciser cette idée pour plusieurs types de lois des grands nombres : Cesàro, Kolmogorov, Marcienkiewicz-Zygmund.

# 2 Rappels et généralités

## 2.1 Convergence au sens de Cesàro de suites de variables aléatoires

**Définition 2.1** :
Soit $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, et $\alpha > -1$ un réel. On dit que *la suite* $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *converge presque sûrement au sens de Cesàro d'ordre* $\alpha$ si la suite de variables aléatoires $(\mathbf{V}_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\mathbf{V}_n^\alpha := \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{i=0}^{n} A_{n-i}^{\alpha-1}\mathbf{X}_i$$

converge presque sûrement, les coefficients $A_n^\alpha$ étant définis par

$$A_n^\alpha := \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{n!}.$$

- L'ordre de grandeur de $A_n^\alpha$ est de $n^\alpha$ lorsque $n \to +\infty$.
- Lorsque $\alpha = 1$, et que les variables sont indépendantes et identiquement distribuées, on retrouve la loi forte des grands nombres de Kolmogorov.

Pour $\alpha < 1$, on a un résultat similaire :

**Theorème 2.2** :
*Soit* $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, centrées, et* $0 < \alpha \leqslant 1$ *un réel. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La suite* $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *converge* $(C,\alpha) - p.s$ *vers 0.*
2. $\mathbb{E}|\mathbf{X}_1|^{\frac{1}{\alpha}} < +\infty$.

Ce théorème a été démontré dans le cas $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ par G.G. Lorentz ; dans le cas $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ par Chow et Lai en 1973, et par Y. Déniel et Y. Derriennic en 1988 dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$.

## 2.2 La loi des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund

**Theorème 2.3** :
*Soit* $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, centrées, et* $p \in [1,2[$ *fixé. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La suite* $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge presque sûrement vers 0.*
2. $\mathbb{E}|\mathbf{X}_1|^p < +\infty$

## 2.3 Martingales généralisées

**Définition 2.4** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(\mathcal{F}_n)$ une filtration, c'est–à–dire une suite croissante de sous–tribus de $\mathcal{F}$. Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des temps d'arrêt bornés à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Soit $(\mathbf{Z}_n)$ une suite de variables aléatoires intégrables adaptées à la filtration.

- On dit que $(\mathbf{Z}_n)$ *est un amart* si $(\mathbb{E}\mathbf{Z}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$ converge dans $\mathbb{R}$.
- On dit que $(\mathbf{Z_n})$ *est une quasimartingale* si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|\mathbb{E}(\mathbf{Z_{n+1}}|\mathcal{F}_n) - \mathbf{Z_n}| < +\infty.$$

- Une quasimartingale est en particulier un amart.
- La réciproque est fausse.

# 3 Résultats

Soient $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, équidistribuées, centrées, et $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$.

| Type de convergence | Suite | LGN ssi | Amart sous LGN | Quasimartingale sous LGN |
|---|---|---|---|---|
| Cesaro d'ordre $\alpha < 1$ | $\mathbf{V}_n^\alpha$ | $\mathbf{X}_1 \in L^{\frac{1}{\alpha}}$ | Toujours | Jamais |
| Cesaro d'ordre 1 | $\dfrac{\mathbf{S}_n}{n}$ | $\mathbf{X}_1 \in L^1$ | ssi $\lvert\mathbf{X}_1\rvert \ln^+ \lvert\mathbf{X}_1\rvert \in L^1$ (1) | ssi $\lvert\mathbf{X}_1\rvert \ln^+ \lvert\mathbf{X}_1\rvert \in L^1$ |
| Marcinkiewicz-Zygmund, $p \in ]1,2[$ | $\dfrac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}$ | $\mathbf{X}_1 \in L^p$ | Toujours (2) | ssi $\int_0^{+\infty} (\mathbb{P}(\lvert\mathbf{X}_1\rvert > t))^{\frac{1}{p}}\, dt < +\infty$ (3) |

(1) Marcinkiewicz et Zygmund ont montré que la condition $|\mathbf{X}_1| \ln^+ |\mathbf{X}_1| \in L^1$ entraîne $\mathbb{E} \sup \frac{|\mathbf{S}_n|}{n} < +\infty$ ce qui, avec la convergence presque sûre de $\frac{\mathbf{S}_n}{n}$ vers 0 permet de voir que $\frac{\mathbf{S}_n}{n}$ est un amart. La réciproque est due à B. Davis.

(2) est due à A. Gut

(3) est un résultat de B. Heinkel.

**Proposition 3.1** *:*
*Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\int_0^{+\infty} (\mathbb{P}(|\mathbf{X}| > t))^{\frac{1}{p}}\, dt < +\infty$
2. $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{u_n}{n^{1+1/p}} < +\infty$

*où* $u_n$ *désigne le quantile d'ordre* $1 - \frac{1}{n}$ *de* $\mathbf{X}_1$*, c'est–à–dire*

$$u_n := \inf\{x | \mathbb{P}(|\mathbf{X}_1| \leq x) > 1 - \frac{1}{n}\} = \inf\{x | \mathbb{P}(|\mathbf{X}_1| > x) < \frac{1}{n}\}.$$

# 4 Indications de démonstration de la propriété d'amart sous la loi des grands nombres, pour la convergence au sens de Cesàro généralisée.

## 4.1 Cas de variables $(\mathbf{X}_n)$ symétriques.

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{Y}_{nk} := \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\{|\mathbf{X}_k| \leqslant n^\alpha\}}$ et $\mathbf{Z}_{nk} := \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\{|\mathbf{X}_k| > n^\alpha\}}$ .
Soient $\mathbf{U}_n$ et $\mathbf{W}_n$ les sommes de Cesàro d'ordre $\alpha$ associées respectivement à $(\mathbf{Y}_{nk})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et à $(\mathbf{Z}_{nk})_{1 \leqslant j \leqslant n}$.

On montre facilement que $(\mathbf{W}_n, \mathcal{F}_n)$ est une quasimartingale, donc a fortiori un amart.

On va montrer que $(\mathbf{U}_n, \mathcal{F}_n)$ est un amart.

Soient $N > M > 0$ et $\tau \in \mathcal{T}$, $\tau \in [M, N]$. On se donne un entier $r$ vérifiant les conditions $r(1-\alpha) > 1$, $r > \frac{1}{\alpha}$ et $r > 4$.

On applique l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathcal{T}} \mathbf{U}_{\mathcal{T}} d\mathbb{P} \right| &= \left| \sum_{n=M}^{N} \int_{\mathcal{T}=n} \mathbf{U}_n d\mathbb{P} \right| \\
&\leqslant \sum_{n=M}^{N} (\mathbb{P}(\mathcal{T}=n))^{1-\frac{1}{r}} (\mathbb{E}|\mathbf{U}_n|^r)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Pour majorer $\mathbb{E}|\mathbf{U}_n|^r$, on utilise l'inégalité de Rosenthal :

**Theorème 4.1 (Inégalité de Rosenthal)** :
*Soient* $(\mathbf{X_k})_{k=1..n}$ *n variables aléatoires réelles indépendantes centrées et* $p \geq 2$*. Posons*

$$M_{p,n} := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|\mathbf{X_k}|^{\mathbf{p}}$$

$$B_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\mathbf{X_k^2}.$$

*Alors*

$$\mathbb{E}|\mathbf{S_n}|^{\mathbf{p}} \leq C(p)\left(M_{p,n} + B_n^{\frac{p}{2}}\right),$$

*où* $C(p)$ *est une constante ne dépendant que de p.*

On applique cette inégalité aux variables $\frac{A_{n-i}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}\mathbf{Y}_{ni}$, de somme $\mathbf{U}_n$.

On montre que $B_n^{r/2} \leqslant n^{-\beta}$ pour un $\beta > 1$ convenable.

Il reste à traiter $M_{r,n} \leq c\dfrac{1}{n^{r\alpha}}\mathbb{E}|\mathbf{Y}_{n1}|^r$.

On écrit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{r\alpha}}\mathbb{E}|\mathbf{Y}_{n1}|^r &= \frac{1}{n^{r\alpha}} r\int_0^{+\infty} x^{r-1}\mathbb{P}(|\mathbf{Y}_{n1}| > x)dx \\
&\leqslant \frac{1}{n^{r\alpha}} r\int_0^{n^\alpha} x^{r-1}\mathbb{P}(|\mathbf{X}_1| > x)dx.
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $u = \frac{x}{n^\alpha}$

$$\frac{1}{n^{r\alpha}}\mathbb{E}|\mathbf{Y}_{n1}|^r \leqslant r\int_0^1 u^{r-1}\mathbb{P}\left(\frac{|\mathbf{X}_1|}{n^\alpha} > u\right)du.$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{r\alpha}} \mathbb{E}|\mathbf{Y}_{n1}|^r &\leqslant r \int_0^1 u^{r-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left( \frac{|\mathbf{X}_1|^{\frac{1}{\alpha}}}{u^{\frac{1}{\alpha}}} > n \right) \\
&\leqslant r \int_0^1 u^{r-1} \frac{\mathbb{E}|\mathbf{X}_1|^{\frac{1}{\alpha}}}{u^{\frac{1}{\alpha}}} du \\
&< +\infty \quad \text{car } \frac{1}{\alpha} + 1 - r < 1.
\end{aligned}$$

Notons que l'on a utilisé le fait que si $\mathbf{T}$ est une v.a. positive,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{T}) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{T} > x)dx \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_i^{i+1} \mathbb{P}(\mathbf{T} > x)dx \\
&\geqslant \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{T} > i+1).
\end{aligned}$$

Finalement, les séries ayant pour termes généraux $\frac{1}{n^{r\alpha}} \mathbb{E}|\mathbf{Y}_1|^r$ et $\frac{1}{n^\beta}$ sont convergentes, donc $\left( (\mathbb{E}|\mathbf{U}_n|^r)^{\frac{1}{r}} \right)_n \in \ell^r$.

On reprend alors le résultat obtenu plus haut en appliquant l'inégalité de Hölder :

$$\left| \int_{\mathcal{T}} \mathbf{U}_{\mathcal{T}} d\mathbb{P} \right| \leqslant \sum_{n=M}^{N} (\mathbb{P}(\mathcal{T} = n))^{1-\frac{1}{r}} (\mathbb{E}|\mathbf{U}_n|^r)^{\frac{1}{r}}.$$

Comme $\left( (\mathbb{P}(\tau = n))^{1-\frac{1}{r}} \right)_n \in \ell^{\frac{r}{r-1}}$, le membre de droite de cette inégalité est fini par l'inégalité de Hölder dans $\ell^r$.

Donc $\lim_{M \to +\infty} \sup_{\tau \geqslant M} \mathbb{E}(\mathbf{W}_\tau) = 0$. La suite $(\mathbf{W}_n)$ est donc un amart.

## 4.2 Cas de variables $(\mathbf{X}_n)$ non nécéssairement symétriques.

Soient $(\mathbf{X'}_n)$ une suite de v.a. i.i.d., de même loi que $(\mathbf{X}_n)$, indépendante de la suite $(\mathbf{X}_n)$.

Soient $(\mathbf{V}_n)$ et $(\mathbf{V'}_n)$ les sommes de Cesàro associées.

Alors le raisonnement précédent permet de montrer que $(\mathbf{V}_n - \mathbf{V'}_n)$ est un amart pour la filtration $(\mathcal{F}''_n)$ où $\mathcal{F}''_n$ est la tribu engendrée par les variables $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n, \mathbf{X'}_1, \ldots, \mathbf{X'}_n$.

Soit $\tau \in \mathcal{T}$. On remarque que

$$\begin{aligned}\int_{\{\tau=n\}} \mathbf{V}_n - \mathbf{V'}_n d\mathbb{P} &= \int_{\{\tau=n\}} \mathbf{V}_n d\mathbb{P} - \int_{\{\tau=n\}} \mathbf{V'}_n d\mathbb{P} \\ &= \int_{\{\tau=n\}} \mathbf{V}_n d\mathbb{P} - \mathbb{P}(\mathcal{T} = n)\mathbb{E}(\mathbf{V'}_n) \\ &= \int_{\{\tau=n\}} \mathbf{V}_n d\mathbb{P}\end{aligned}$$

Le résultat attendu découle du fait qu'un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$ en est encore un pour la filtration $(\mathcal{F}''_n)$.

## Références


[1] Y.S. Chow, T.L. Lai, Limiting behaviour of weighted sums of independent identically distributed random variables, Ann. Probab. 1 (1973), 810–823.

[2] R. Davis, Stopping Rules for $S_n/n$, and the Class $L \log L$,Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 17 (1971), 147–150.

[3] Y. Déniel, Y. Derriennic, Sur la convergence presque sûre, au sens de Cesàro d'ordre $\alpha$, $0 < \alpha < 1$, de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, Probab. Th. Rel. Fields 79 (1988), 629–636.

[4] G.A. Edgar, L. Sucheston, Stopping times and directed processes, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 47, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[5] P. Erdös, On a theorem of Hsu and Robbins, Ann. Math. Statist. 20, No 2, 286–291 (1949)

[6] A. Gut, A contribution to the theory of asymptotic martingales, Glasgow Math J. 23, 177-186, (1982)

[7] B. Heinkel, On the Marcinkiewicz-Zygmund quasimartingale,preprint, 2007.

[8] P.L. Hsu, H. Robbins, Complete convergence and the law of large numbers. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 33, No2, 25–31 (1947)

[9] G.G. Lorentz, Borel and Banach properties of methods of summation, Duke Math. J. 22 (1955), 129–141.

[10] J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, Sur les fonctions indépendantes, Fund. Math. 29 (1937), 60–90.

[11] H.P. Rosenthal, On the subspace of $L_p$ $(p > 2)$ spanned by sequences of independant random variables, Israel J. Math. 8 (1970), 273–303.

[12] A. Zygmund, Trigonometric series, Cambridge : Cambridge University Press, 1968.