Spectre multifractal et taux de décroissance exacte des fragments d'une fragmentation homogène.[1]

Nathalie Krell
krell@ccr.jussieu.fr

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires,
Université Pierre et Marie Curie.

Journée de Probabilités
10 septembre 2007

[1] à paraitre à SPA.

Plan

Plan

Plan

Définition heuristique d'une fragmentation.

On va considérer les fragmentations définies sur l'espace $\mathcal{U}$ des ouverts de $]0,1[$. On utilisera la décomposition en intervalles de chaque ouvert. Chaque intervalle sera considéré comme un fragment.
Une fragmentation homogène en intervalles est un processus de Markov à valeur dans $\mathcal{U}$ qui vérifie deux propriétés.

1. **La propriété de branchement**: différents fragments ont des évolutions indépendantes
2. **La propriété d'homogénéité**: à un facteur spatial près, la loi de la fragmentation ne dépend pas de la taille initiale de l'intervalle.

Plan

Définition d'une fragmentation.

On va uniquement considérer les fragmentations "propres", c'est à dire sans perte de masse.
De plus la manière dont un fragment va se disloquer est donnée par la mesure de dislocation ν sur $\mathcal{U}$ (l'ensemble des ouverts de $]0,1[$). ν vérifie

$$\nu(]0,1[) = 0,$$

$$\int_{\mathcal{U}} (1-u_1)\nu(dU) < \infty, \tag{1}$$

où u_1 est la taille du plus grand intervalle contenu dans U et

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = 1 \qquad pour\ \nu - presque\ tout\ U\ \in \mathcal{U},$$

où $|U|^{\downarrow} := (u_1, u_2, \ldots)$.

Pour $U =]a_1, b_1[\in \mathcal{U}$, on va définir la transformation affine $g_U :]0,1[\to U$ donnée par $g_U(x) = a_1 + x(b_1 - a_1)$.

Soit $K = ((\Delta(t), k(t)), t \geq 0)$ un processus de Poisson ponctuel à valeurs dans $\mathcal{U} \times \mathbb{N}$, et ayant pour mesure d'intensité $\nu \otimes \sharp$, où $\sharp$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

On peut construire un unique processus $F = (F(t), t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathcal{U}$, partant de $]0,1[$, et dont les sauts apparaissent seulement aux temps $t \geq 0$ où un point $(\Delta(t), k(t))$ apparaît, et alors $F(t)$ est obtenu en remplaçant le $k(t)$ème intervalle $J_{k(t)}(t-)$ par $g_{J_{k(t)}(t-)}(\Delta(t))$.

Plan

Un subordinateur important.

Soit $x \in]0,1[$, $I_x(t)$ l'intervalle de $F(t)$ le contenant , et $|I_x(t)|$ sa taille. Soit V une v.a. de loi uniforme sur$[0,1]$ et indépendante de la fragmentation.
Bertoin a montré que

$$\xi_t := -\log|I_V(t)|, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

est un subordinateur.

Plan

Présentation du problème.

Soit $(F(t), t \geq 0)$ une fragmentation homogène en intervalles, $v > 0$ et $0 < a < b$. On va s'intéresser à l'ensemble: $G_{(v,a,b)} :=$

$$\left\{ x \in (0,1) \ : \ a \leq \liminf_{t \to \infty} e^{vt} |I_x(t)| \leq \limsup_{t \to \infty} e^{vt} |I_x(t)| \leq b \right\}.$$

Présentation du problème.

Soit $(F(t), t \geq 0)$ une fragmentation homogène en intervalles, $v > 0$ et $0 < a < b$. On va s'intéresser à l'ensemble: $G_{(v,a,b)} :=$

$$\left\{x \in (0,1) \ : \ a \leq \liminf_{t\to\infty} e^{vt}|I_x(t)| \leq \limsup_{t\to\infty} e^{vt}|I_x(t)| \leq b\right\}.$$

Dans une première partie on va considérer un problème plus simple, qui n'est pas asymptotique: pour $0 < a < 1 < b$ on va étudier l'ensemble:

$$\Lambda_{(v,a,b)} := \left\{x \in (0,1) \ : \ a < |I_x(t)|e^{vt} < b \ \forall t \geq 0\right\}, \qquad (3)$$

et donner sa dimension de Hausdorff.

Remarque

D'après la loi des grands nombres appliquée au subordinateur ξ_t il existe $v_{typ} > 0$ telle que $\xi_t / t \to_{t\to\infty} v_{typ}$ et donc $|I_x(t)| \approx_{t\to\infty} e^{-v_{typ} t}$.

Remarque

D'après la loi des grands nombres appliquée au subordinateur ξ_t *il existe* $v_{typ} > 0$ *telle que* $\xi_t / t \to_{t\to\infty} v_{typ}$ *et donc* $|I_x(t)| \approx_{t\to\infty} e^{-v_{typ} t}$.
C'est pourquoi pour $v \neq v_{typ}$ *la mesure de Lebesgue de* $G_{(v,a,b)}$ *est nulle. C'est pourquoi on en déterminera la dimension de Hausdorff.*

Remarque

D'après la loi des grands nombres appliquée au subordinateur ξ_t *il existe* $v_{typ} > 0$ *telle que* $\xi_t / t \to_{t\to\infty} v_{typ}$ *et donc* $|I_x(t)| \approx_{t\to\infty} e^{-v_{typ} t}$.
C'est pourquoi pour $v \neq v_{typ}$ *la mesure de Lebesgue de* $G_{(v,a,b)}$ *est nulle. C'est pourquoi on en déterminera la dimension de Hausdorff.*
Berestycki dans [1] a calculé celle de

$$G_v = \left\{ x \in (0,1) \mid \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log |I_x(t)| = -v \right\}.$$

Plan

Plan

Un résultat préliminaire de Lambert.

Soit $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy sans saut positif et soit $(\mathcal{E}_t)_{t\geq 0}$ la filtration associée à $(Y_t)_{t\geq 0}$.
La loi du processus de Lévy commençant en $x \in \mathbb{R}$ sera notée $\mathbf{P}_x$.

Théorème (Lambert [2])

On suppose que la distribution 1-dimensionnelle du processus de Lévy est absolument continue, alors le processus

$$D_t := e^{\rho_\beta t}\, \mathbf{1}_{\{t<T_\beta\}}\, \frac{W^{(-\rho_\beta)}(Y_t)}{W^{(-\rho_\beta)}(x)}$$

est une $(\mathbf{P}_x, (\mathcal{E}_t))$*-martingale.*

Plan

Une martingale additive.

On va considérer le processus de Lévy sans saut négatif: $Y_t := vt - \xi_t + \log(1/a)$.
La $(\mathcal{G}_t)$-martingale D_t est donc dans notre cas

$$D_t = e^{\rho t} \; \mathbf{1}_{\{t<T\}} \; \frac{h(vt + \log |I_V(t)|)}{h(0)}, \qquad t \geq 0.$$

Si I est un intervalle de $F(t)$, on définit l'intervalle tué $I^\dagger$ par $I^\dagger = I$ si I est bon (i.e. $I \in G(t)$), et sinon $I^\dagger = \emptyset$. En projetant D_t sur la sous-filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, on obtient la martingale additive

$$M_t := \frac{e^{\rho t}}{h(0)} \int_0^1 h(vt + \log |I_x^\dagger(t)|) \; dx \; , \qquad t \geq 0.$$

En considérant $(J_1(t), J_2(t), \dots)$ la décomposition en intervalles de l'ouvert $F(t)$, on peut réécrire M_t comme:

$$M_t = \frac{e^{\rho t}}{h(0)} \sum_{i \in \mathbb{N}} h\left(vt + \log |J_i^\dagger(t)|\right) |J_i^\dagger(t)|. \tag{4}$$

Soit le temps d'absorption de M_t à 0

$$\zeta \quad := \quad \inf\{t : M_t = 0\} = \inf\{t : G(t) = \emptyset\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$.

Théorème

Si $v > \rho$ et avec une certaine hypothèse, alors:

1. *La martingale M_t est bornée dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{P})$.*
2. *Conditionnellement à $\zeta = \infty$, on a: $\lim_{t\to\infty} M_t > 0$.*

Théorème

Si $v > \rho$ et avec une certaine hypothèse, alors:

1. *La martingale M_t est bornée dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{P})$.*
2. *Conditionnellement à $\zeta = \infty$, on a: $\lim_{t\to\infty} M_t > 0$.*

*

Remarque

On remarque que ρ dépend de v, a, b et ν, la condition $v > \rho$ implique des conditions sur a et b. En particulier on a nécessairement $b > 2a$

Plan

Théorème limite.

Bertoin et Rouault (Corollary 2 in [3]) ont prouvé que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sharp\{I_x(t) : \ ae^{-vt} < |I_x(t)| < be^{-tv}\} = C(v).$$

Théorème limite.

Bertoin et Rouault (Corollary 2 in [3]) ont prouvé que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sharp\{I_x(t) : \ ae^{-vt} < |I_x(t)| < be^{-tv}\} = C(v).$$

Corollaire

Sous une certaine hypothèse et si $v > \rho$ on obtient que conditionnellement à $\zeta = \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sharp G(t) = \ v - \rho \qquad p.s. \tag{5}$$

Plan

Plan

La dimension de Hausdorff.

Soit *dim* la dimension de Hausdorff.

Théorème

- *Si on a* $\rho > v$ *, alors:*

$$G_{(v,a,b)} = \emptyset \quad p.s.$$

- *si on a* $\rho < v$*, alors:*

$$dim(G_{(v,a,b)}) = 1 - \rho/v \quad p.s. \tag{6}$$

Plan

La preuve.

Proposition

On suppose $0 < a < 1 < b$*:*

- *Si* $\rho > v$, *alors:* $\Lambda_{(v,a,b)} = \emptyset \quad p.s.$
- *Si* $\rho < v$ *alors: conditionnellement à* $\Lambda_{(v,a,b)} \neq \emptyset$*:*

$$dim(\Lambda_{(v,a,b)}) = 1 - \rho/v. \tag{7}$$

Démonstration :

2.• Pour le calcul de la borne inférieure de la dimension de Hausdorff du deuxième cas, on utilise un argument analogue a celui utilisé par Berestycki dans [1]. En effet on va construire un arbre discret (dont les noeuds sont à valeurs dans $\mathcal{U}$) retraçant l'évolution des bons fragments pris en des intervalles de temps bien choisis. On va construire un sous arbre de Galton-Watson pour lequel on saura faire des calculs explicites et on conclura.

Démonstration :

2.• Pour le calcul de la borne inférieure de la dimension de Hausdorff du deuxième cas, on utilise un argument analogue a celui utilisé par Berestycki dans [1]. En effet on va construire un arbre discret (dont les noeuds sont à valeurs dans $\mathcal{U}$) retraçant l'évolution des bons fragments pris en des intervalles de temps bien choisis. On va construire un sous arbre de Galton-Watson pour lequel on saura faire des calculs explicites et on conclura.

• La majoration de la dimension de Hausdorff est un Corollaire du fait que la dimension de Hausdorff est plus petite que la dimension de box-counting.

$\blacksquare$

Corollaire

Pour $t^{'} \geq 0$ *soit*
$\Lambda_{(v,a,b)}(t^{'}) := \{x \in (0,1) \ : \ ae^{-vt} < |I_x(t)| < be^{-vt} \ \forall t \geq t^{'}\}$.
On suppose $a < b$ *et* $\rho < v$*, alors*

$$\mathbb{P}(dim(\Lambda_{(v,a,b)}(t^{'})) \leq 1 - \rho/v) = 1$$

et

$$\mathbb{P}(dim(\Lambda_{(v,a,b)}(t^{'})) = 1 - \rho/v) \underset{t^{'} \to \infty}{\longrightarrow} 1.$$

Corollaire

Pour $t^{'} \geq 0$ *soit*
$\Lambda_{(v,a,b)}(t^{'}) := \{x \in (0,1)\ :\ ae^{-vt} < |I_x(t)| < be^{-vt}\ \forall t \geq t^{'}\}$.
On suppose $a < b$ *et* $\rho < v$, *alors*

$$\mathbb{P}(dim(\Lambda_{(v,a,b)}(t^{'})) \leq 1 - \rho/v) = 1$$

et

$$\mathbb{P}(dim(\Lambda_{(v,a,b)}(t^{'})) = 1 - \rho/v) \underset{t^{'} \to \infty}{\longrightarrow} 1.$$

Et on va conclure en utilisant l'inclusion: pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Lambda_{(v,a,b)}(n) \subset G_{(v,a,b)} \subset \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Lambda_{(v,a-\epsilon,b+\epsilon)}(m)$$

Plan

La bibliographie.

J. BERESTYCKI (2003). Multifractal spectra of fragmentation processes. *J. Statist. Phys*, **113**, no. 3-4, 411-430.

J. BERTOIN (1997). Exponential decay and ergodicity of completely asymmetric Lévy processes in a finite intervalle. *Ann. Appl. Probab*, **7**, no. 1, 156-169.

J. BERTOIN and A. ROUAULT (2005). Discretization methods for homogeneous fragmentations. *J. London Math. Soc.* **72**, 91-109.

A. LAMBERT (2000). Completely asymmetric Lévy processes confined in a finite intervalle. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist*, **36** , no. 2, 251-274.

Plan

Plan

6 **Appendice.**

- Rappel du Théorème 1
- Démonstration du Théorème 1
- **Un autre théorème limite**
- Définition de ρ

Rappel du Théorème 1.

Théorème

Si $v > \rho$ et avec une certaine hypothese, alors:

1. *La martingale M_t est bornée dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{P})$.*
2. *Conditionnellement à $\zeta = \infty$, on a: $\lim_{t\to\infty} M_t > 0$.*

Plan

6 **Appendice.**

- Rappel du Théorème 1
- Démonstration du Théorème 1
- **Un autre théorème limite**
- Définition de ρ

Démonstration du Théorème 1.

Démonstration 1. La martingale M étant purement discontinue, il suffit de montrer que la variation quadratique

$$V_2 := \sum_{t \geq 0} |M_t - M_{t-}|^2$$

de $M_.$ est intégrable, car alors $M_.$ sera bornée dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{P})$. Pour cela on va exprimer les sauts $M_.$ en terme de points d'un processus ponctuel de Poisson et le théorème 1.

2. Soit I un ouvert de $]0,1[$. La loi de fragmentation homogène en intervalles commençant en I sera notée $\mathbb{P}_I$. On remarque que $\mathbb{P}_I(M_\infty = 0|\zeta = \infty)$ dépend uniquement de la longueur de I. Soit

$$g(x) := \mathbb{P}_I(M_\infty = 0|\zeta = \infty),$$

où I est un intervalle de longueur x. Soit N la partie entière de $(2b-a)/a$. Comme $v > \rho$, on a nécessairement $b > 2a$, d'où $N \geq 2$. Soit $\eta := (b-a)N^{-1}$ ($\eta < a$ et $b - a = N\eta$). On va noter T^F le premier temps où il y a au moins deux bons intervalles

$$T^F := \inf\{t : \sharp G(t) \geq 2\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$. On remarque que T^F est un $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt.

Lemme

Sous une certaine hypothèse et si $v > \rho$, alors on obtient: pour tout intervalle I

$$\mathbb{P}_I(T^F = \infty | \zeta = \infty) = 0.$$

Lemme

Sous une certaine hypothèse et si $v > \rho$, alors on obtient: pour tout intervalle I

$$\mathbb{P}_I(T^F = \infty | \zeta = \infty) = 0.$$

Lemme

Sous une certaine hypothèse et si $v > \rho$, alors on obtient

$$\sup_{a<x<b} g(x) = \max_{1 \leq k \leq N} g(a + k\eta)$$

$\blacksquare$

*

Plan

6 Appendice.

- Rappel du Théorème 1
- Démonstration du Théorème 1
- **Un autre théorème limite**
- Définition de ρ

Un autre théorème limite

La mesure aléatoire

$$\sigma_t := \frac{e^{\rho t}}{h(0)} \sum_{i \in \mathbb{N}} h\left(vt + \log |J_i^\dagger(t)|\right) |J_i^\dagger(t)| \delta_{\log(1/a)+vt+\log|J_i^\dagger(t)|}$$

rend compte de la configuration $J^\dagger(t) = \{|J_i^\dagger(t)|\}$ de la taille des bons intervalles et a pour masse M_t. La mesure moyenne associée σ_t^* est définie par la formule

$$\int_0^\infty f(x)\sigma_t^*(dx) = \mathbb{E} \int_0^\infty f(x)\sigma_t(dx)$$

pour toute fonction continue et à support compact f. Comme M_t est une martingale, σ_t^* est une mesure de probabilité.

Corollaire

Sous une certaine Hypothèse et avec $v > \rho$ on obtient:

1. *La mesure σ_t^* converge faiblement quand $t \to \infty$, vers la mesure de probabilité*

$$\varrho(dy) := ch(y + \log a)h(\log(b) - y)dy$$

2. *Pour toute fonction bornée f:*

$$L^2 - \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty f(x)\sigma_t(dx) = M_\infty \int_0^\infty f(x)\varrho(dx). \quad (8)$$

Corollaire

Sous une certaine Hypothèse et avec $v > \rho$ on obtient:

1. *La mesure σ_t^* converge faiblement quand $t \to \infty$, vers la mesure de probabilité*

$$\varrho(dy) := ch(y + \log a)h(\log(b) - y)dy$$

2. *Pour toute fonction bornée f:*

$$L^2 - \lim_{t \to \infty} \int_0^\infty f(x)\sigma_t(dx) = M_\infty \int_0^\infty f(x)\varrho(dx). \quad (8)$$

Démonstration: La démonstration est analogue à celle de Bertoin and Gnedin dans [1] et utilise le théorème 1.1.

J. BERTOIN and A. V. GNEDIN (2004). Asymptotic laws for nonconservative self-similar fragmentations. *Electron. J. Probab.* **9** no. 19, 575-593.

Plan

6 Appendice.

- Rappel du Théorème 1
- Démonstration du Théorème 1
- **Un autre théorème limite**
- Définition de ρ

Soit $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy sans saut positif.
Sa transformée de Laplace est donnée par $\mathbf{E}_0(e^{\lambda Y_t}) = e^{t\psi(\lambda)}$, $\lambda,\ t \geq 0$. Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ l'inverse à droite de ψ.
Soit $W : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ la fonction d'échelle, c'est à dire l'unique fonction continue telle que:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W(x) dx = \frac{1}{\psi(\lambda)} \quad , \ \lambda > \phi(0).$$

Pour $q \in \mathbb{R}$, soit $W^{(q)} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ l'unique fonction continue telle que

$$W^{(q)}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} q^k W^{*k+1}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,$$

et

$$\rho_\beta := \inf\{q \geq 0 \ ; \ W^{(-q)}(\beta) = 0\}.$$

On applique ces notations pour $Y_t = vt - \xi_t + \log(1/a)$.