# Martingales à valeurs dans les cônes

**Y. Kabanov, C. Stricker**

10 septembre 2007

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\le 1}, P)$. Soit $C$ un cône dans $\mathbf{R}^d$ dont l'intérieur contient le vecteur $\mathbf{1} = (1, ..., 1)$. $S = (S)_{t\le 1}$ est un processus continu adapté à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ ayant des composantes strictement positives. On note $\Sigma_t := \operatorname{diag} S_t$.

*Quand* $\mathcal{M}_0^1(\Sigma C \setminus \{0\})$ *est non vide?*

C'est-à-dire quand existe-t-il une martingale $M$ avec $M_t \in L^1(\Sigma_t C \setminus \{0\}, \mathcal{F}_t)$ pour tout $t \in [0, 1]$?

Guasoni P., Rásonyi M., Schachermayer W. Consistent price systems and face-lifting pricing under transaction costs. Preprint, 2007.

$H \cdot S_T := \sum_{i=1}^{T} H_i \Delta S_i$

$R_T := \{\xi : \ \xi = H \cdot S_T, \ H \in \mathcal{P}\}$

NA: $R_T \cap L^0_+(\mathcal{F}_T) = \{0\}$

$A_{i,i+1}$ le support topologique de la loi conditionnelle $P_{i,i+1}(dx, \omega)$ de $S_{i+1} - S_i$ par rapport à $\mathcal{F}_i$.

**Theorème** Il y a équivalence entre :

$(a)$ $R_T \cap L^0_+ = \{0\}$;

(b) $0 \in \mathrm{ri}\,\mathrm{conv}\, A_{i,i+1}$

$(c)$ il existe une martingale strictement positive et bornée $Z = (Z_t)_{t \leq T}$ vérifiant $E(Z_T) = 1$ telle que le processus $ZS$ soit une martingale.

$(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t=0,...,T}) \qquad S^i > 0, \quad i = 1, ..., d$

$\widehat{V}^i := \frac{V^i}{S^i} \quad i = 1, ..., d$

$\Delta V_t := V_t - V_{t-1}$

$$\Delta V_t^i = \widehat{V}_{t-1}^i \Delta S_t^i + \Delta B_t^i, \quad t = 0, 1, ..., T, \quad (1)$$

avec $V_{-1}^i = v^i$,

$$\Delta B_t^i := \sum_{j=1}^{d} \Delta L_t^{ji} - \sum_{j=1}^{d} (1 + \lambda_t^{ij}) \Delta L_t^{ij}, \qquad (2)$$

$\Delta L_t^{ji} \geq 0 \qquad \Delta L_t^{ii} = 0$

$\Delta \widehat{V}_t^i = \Delta B_t^i / S_t^i$

$$\Delta B_t^i := \sum_{j=1}^d \Delta L_t^{ji} - \sum_{j=1}^d (1+\lambda_t^{ij}) \Delta L_t^{ij}$$

$$\Delta B_t \in L^0(-M_t, \mathcal{F}_t)$$

$$M_t(\omega) := \{x \in I\!R^d : \ \exists\, a \in \mathbf{M}_+^d \text{ tel que}$$

$$x^i = \sum_{j=1}^d [(1+\lambda_t^{ij}(\omega))a^{ij} - a^{ji}], \ i \le d\}$$

$$M^* := \{w \in I\!R^d : wx \ge 0 \ \forall x \in M\}$$

$$= \{w \in I\!R^d : w^j - (1+\lambda^{ij}) w^i \le 0, \ 0 \le i, \ j \le d\}$$

$$K_t := M_t + \mathbb{R}^d_+$$

$V_T \in L^0(K_T, \mathcal{F}_T)$ ssi $\exists \Delta \tilde{B}_T \in L^0(-M_T, \mathcal{F}_T)$

tel que $\forall i \; V_T^i + \Delta \tilde{B}_T^i \geq 0$

$$K^* = M^* \cap \mathbb{R}^d_+$$

$$M^* := \{w \in \mathbb{R}^d : wx \geq 0 \; \forall x \in M\}$$

$$= \{w \in \mathbb{R}^d : w^j - (1 + \lambda^{ij}) w^i \leq 0, \; 0 \leq i, \; j \leq d\}$$

$$\mathbf{1} = (1, ..., 1) \in K^*$$

$\Lambda = 0$

$M^* := \{w \in \mathbb{R}^d : wx \geq 0 \ \forall x \in M\}$

$= \{w \in \mathbb{R}^d : w^j - (1+\lambda^{ij})w^i \leq 0, \ 0 \leq i, \ j \leq d\}$

$= \{w \in \mathbb{R}^d : w^j \leq w^i, \ 0 \leq i, \ j \leq d\}$

$= \mathbb{R}\mathbf{1}$

$M = \{w \in \mathbb{R}^d : \mathbf{1}w = 0\}$

$K = M + \mathbb{R}^d_+ = \{w \in \mathbb{R}^d : \mathbf{1}w \geq 0\}$

$\Delta V^i_t = \widehat{V}^i_{t-1}\Delta S^i_t + \Delta B^i_t \qquad \bar{V} := V\mathbf{1}$

$\bar{V} = H \cdot S, \ V_T \in L^0(K_T, \mathcal{F}_T) \Leftrightarrow \bar{V} \geq 0$

$\mathbf{NA} \qquad \bar{V}_T \geq 0 \Rightarrow \bar{V}_T = 0$

$V_T \in L^0(K_T, \mathcal{F}_T) \Rightarrow V_T = 0$

**EMM** Il existe une martingale strictement positive $(\rho_t)$ telle que $\rho S$ soit une martingale.

$S^1 \equiv 1,\ Z := \rho S$

$C := K^* \quad \Longrightarrow \widehat{K}^* = \Sigma_t C$

Puisque $K^* = I\!R^+ \mathbf{1}$, **EMM** $\Leftrightarrow$ il existe une martingale à valeurs dans $ri\widehat{K}^*$

$\sigma \geq \tau$

$A_{\tau,\sigma}$ le support topologique de la loi conditionnelle $P_{\tau,\sigma}(dx,\omega)$ de $S_\sigma - S_\tau$ par rapport à $\mathcal{F}_\tau$.

**H$_1$:** $0 \in \mathrm{ri\,conv}\, A_{\tau,\sigma}$ sur $\{\tau < 1\}$ pour tout temps d'arrêt $\tau$ et $\sigma$ tels que $\sigma \geq \tau$ .

**H$_2$:** Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout temps d'arrêt $\tau$, $P(\sup_{\tau \leq r \leq 1} |S_r - S_\tau| \leq \varepsilon | \mathcal{F}_\tau) > 0$ sur $\{\tau < 1\}$.

**Theorème:** Sous $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$, on a :

$\mathcal{M}_0^1(int\Sigma C) \neq \emptyset$.

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_n), P)$

$X = (X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ adapté

$\xi_n = \Delta X_n$

**Lemme** : On suppose que

$(i)$ Pour tout $N$ le processus $(X_n)_{n \leq N}$ vérifie $NA$;

$(ii)$ $I_{\{\xi_n = 0\}} \uparrow 1$ ;

$(iii)$ $P(\xi_n = 0 | \mathcal{G}_{n-1}) > 0$ sur $\{\xi_{n-1} \neq 0\}$ pour tout $n \geq 1$.

Alors il existe une loi $Q \sim P$ telle que $X$ soit une $Q$-martingale bornée dans $L^2(Q)$.

$\theta > 1$ tel que $\Pi_{i=1}^d [1/\theta, \theta] \subset C$

$1/\theta \leq \tilde{S}_t^i / S_t^i \leq \theta$ tel que $\tilde{S}$ soit une $Q$-martingale qui ne s'annule pas

Alors $Z\tilde{S}$ est une $P$-martingale à valeurs dans l'intérieur de $\Sigma C$

$$\tau_0 = 0$$

$$\tau_n := \inf\{t \geq \tau_{n-1} : \max_{i \leq d} |\ln S_t^i - \ln S_{\tau_{n-1}}^i| \geq \ln \theta\} \wedge 1$$

$$\nu := \max\{n : \ \tau_n < 1\}$$

$$X_n := S_{\tau_n} I_{\{\tau_n < 1\}} + S_{\tau_\nu} I_{\{\tau_n = 1\}}$$

$$\mathcal{G}_n := \mathcal{F}_{\tau_n}$$

$$\tilde{S}_t := E_Q(X_\infty | \mathcal{F}_t) \quad \tilde{S}_{\tau_n} = X_n$$