PÉNALISATION BROWNIENNE AVEC LE MAXIMUM ET LE MINIMUM ET APPLICATION

Travail en commun avec B. Roynette (Nancy) et M. Yor (Paris VI).

1 Introduction

1.1 Notations

$\Big(\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), (X_t)_{t\geq 0}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\Big)$ désigne l'espace canonique.

$$X_t(\omega) := \omega(t), \quad \forall\, t \geq 0.$$

$(P_x)_{x\in\mathbb{R}}$ est la collection des mesures de Wiener sur l'espace canonique. En particulier, sous P_0, (X_t) est un mouvement brownien issu de 0.

1.2 Premier niveau du problème de Skorokhod

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$ possédant un moment d'ordre 1 et centrée :

$$\int_{\mathbb{R}} |y|\mu(dy) < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} y\mu(dy) = 0.$$

Alors il existe un temps d'arrêt T fini, standard (i.e. tel que $(X_{s\wedge T}, s \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable) et, sous P_0, X_T a pour loi μ (ce qui sera noté $X_T \sim \mu$).

Introduisons :

$$S_t := \max_{u \leq t} X_u, \quad t \geq 0.$$

Rappelons la solution donnée par Azéma et Yor (1979) : il existe une fonction $\phi_\mu : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ telle que le temps d'arrêt :

$$T_\mu := \inf\{t \geq 0; \; X_t \leq \phi_\mu(S_t)\},$$

est standard et $X_{T_\mu} \sim \mu$.

1.3 Un problème analogue pour les diffusions

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$. On supposera :

$$\mu(x) = \mu_0(x)dx$$

avec μ_0 de classe C^1 et strictement positive.
Alors, il existe une probabilité Q_0 sur $\left(\Omega, \mathcal{F}_\infty\right)$ telle que :

$$X_t = B_t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mu_0'(X_s)}{\mu_0(X_s)}ds$$

où (B_t) est un Q_0-mouvement brownien issu de 0.
Avec des conditions supplémentaires portant sur μ_0 on a :

$$X_t \xrightarrow{(d)} \mu, \quad \text{lorsque} \ \ t \to \infty.$$

1.4 Second niveau du problème de Skorokhod

Soit ν une mesure de probabilité sur $[0,\infty[\times\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{[0,\infty[\times\mathbb{R}} |y|\nu(dx,dy) < \infty \qquad \int_{[0,\infty[\times\mathbb{R}} y\nu(dx,dy) = 0 \\ \\ \displaystyle a\nu\big([a,\infty[\times\mathbb{R}\big) = \int_{[0,\infty[\times\mathbb{R}} 1_{\{x\geq a\}} y\nu(dx,dy) \end{cases} \tag{1}$$

D'après Rogers (1993), il existe un temps d'arrêt T fini, standard tel que :

$$\big(S_T, X_T\big) \sim \nu$$

si et seulement si (1) a lieu.

1.5 Interprétation en terme de "diffusions"

Est-il possible de définir :

1. un processus $(H_u, u \geq 0)$ adapté,
2. une probabilité Q_0 sur $\left(\Omega, \mathcal{F}_\infty\right)$

tels que :

1. $X_t = B_t + \int_0^t H_u du, \quad t \geq 0,$
2. (B_t) est un Q_0-mouvement brownien issu de 0,
3. $\left(S_t, X_t\right) \xrightarrow{(d)} \nu, \quad$ lorsque $\ t \to \infty.$

2 Pénalisations browniennes

2.1 L'objectif

Soit $A \in \mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ tel que

$$P_0(A) = 0.$$

Comment définir $P_0(\cdot|A)$?

Exemples

1. Soit $Z := (Z_1, Z_2)$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et possédant une densité. Soit $A = \{Z_2 = z\}$ où $z \in \mathbb{R}$;
2. $A = \{X_t \leq a,\ \forall t \geq 0\} = \{S_\infty \leq a\}$, avec $a > 0$;
3. $A = \{\alpha \leq X_t \leq \beta,\ \forall t \geq 0\} = \{I_\infty \geq \alpha,\ S_\infty \leq \beta\}$, avec $\alpha < 0$ et $\beta > 0$ et
$$I_t := \min_{u \leq t} X_u, \quad t \geq 0.$$

2.2 Une approche par approximation

On suppose l'existence d'une famille d'événements $(A_t)_{t\geq 0}$ telle que

1. $P_0(A_t) > 0$ pour tout $t \geq 0$;
2. $t \mapsto A_t$ est décroissante : $A_t \subset A_s$ lorsque $t > s$;
3. $A = \bigcap_{t\geq 0} A_t$.

Ce qui conduit à poser :

$$Q_0^A(\Lambda) := \lim_{t\to\infty} P_0(\Lambda | A_t).$$

Pour quels Λ ? Est-ce que P_0^A est une probabilité ? Comment P_0^A dépend de la famille $(A_t)_{t\geq 0}$?

Lorsque $A = \{I_\infty \geq \alpha,\ S_\infty \leq \beta\}$, on choisit :

$$A_t = \{I_t \geq \alpha,\ S_t \leq \beta\}$$

2.3 Rappels sur la pénalisation

On commence par remplacer 1_{A_t} par F_t, où (F_t) est un processus stochastique vérifiant :

$$0 < E_0[F_t] < \infty.$$

Théorème 1 *On suppose :*

$$(\mathbf{1}) \quad \frac{E_0\left[F_t \,|\mathcal{F}_s\right]}{E_0[F_t]} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} M_s \quad p.s. \quad (\forall\ s \geq 0), \qquad (\mathbf{2}) \quad E_0[M_s] = 1.$$

Alors :

1. (M_s) *est une* P_0*-martingale positive ou nulle.*
2. *Pour tout* $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$ *:*

$$Q(\Lambda_s) := \lim_{t\to\infty} \frac{E_0\left[1_{\Lambda_s} F_t\right]}{E_0[F_t]} = E_0\left[1_{\Lambda_s} M_s\right]$$

3. Q *peut être prolongée en une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$*.*

3 Résultats préliminaires

Le but est de pénaliser la mesure de Wiener P_0 avec :

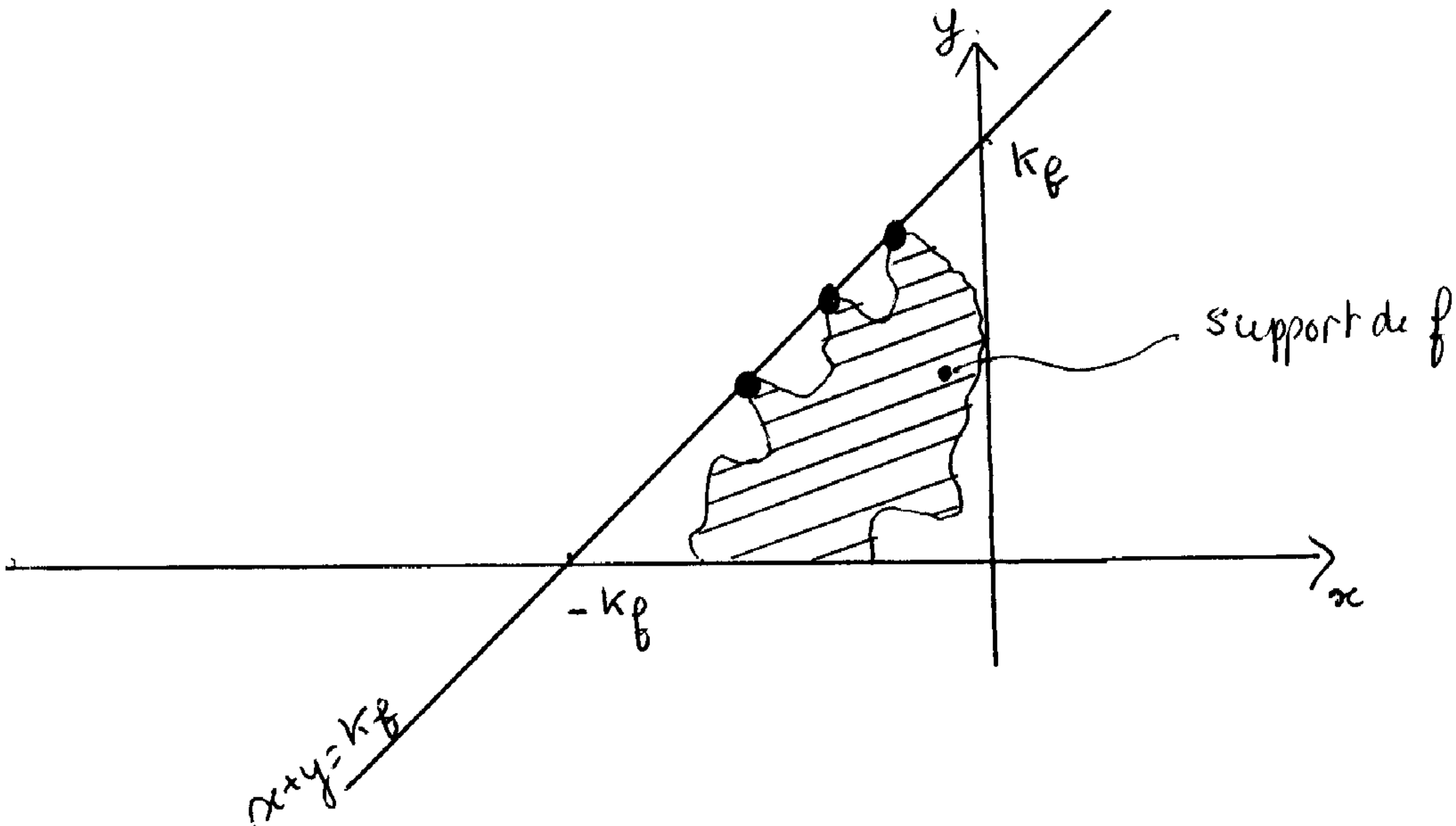
$$F_t = f(I_t, S_t), \quad t \geq 0$$

avec $f :]-\infty, 0] \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ à support compact.
Il s'agit dans un premier temps d'estimer :

$$t \mapsto E_0\big[f(I_t, S_t)\big], \quad t \to \infty.$$

On associe à f le réel :

$$K_f := \sup\{\beta - \alpha ; f(\alpha, \beta) > 0\}.$$



Proposition 2 *On a :*

$$E\big[f(I_t, S_t)\big] = \Delta_t(a_0) + \Delta_t(a_1)t + \Delta_t(fa_2)t^2 + R_t(f)$$

avec

$$\Delta_t(g) := \int_{]-\infty,0]\times[0,\infty[} \frac{g(\alpha,\beta)}{(\beta-\alpha)^6} \exp\Big\{-\frac{\pi^2 t}{2(\beta-\alpha)^2}\Big\} d\alpha d\beta$$

$$|a_0(t,\alpha,\beta)| + |a_1(t,\alpha,\beta)| \leq Cte$$

$$a_2(t,\alpha,\beta) = a_2(\alpha,\beta) := 4\pi^3 \sin\Big(\frac{\pi\beta}{\beta-\alpha}\Big)$$

$$|R_t(f)| \leq Cte \ \exp\Big\{-\frac{8\pi^2 t}{K_f^2}\Big\}, \quad t \geq 1$$

Dans la suite nous allons nous restreindre aux deux cas suivants :

Cas 1

$$f(\alpha, \beta) = F(\alpha, \beta) 1_{\{\alpha \geq \alpha_0, \beta \leq \beta_0\}}$$

avec $\alpha_0 < 0$, $\beta_0 > 0$ et $F : [\alpha_0, 0] \times [0, \beta_0] \to [0, \infty[$ une fonction continue telle que

$$F(\alpha_0, \beta_0) > 0.$$

Alors $K_f = \beta_0 - \alpha_0$.

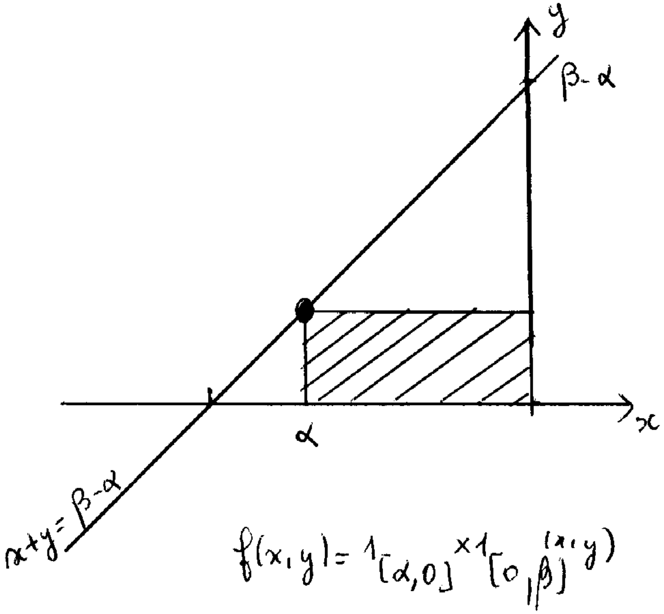
Cas 2

$$f(\alpha, \beta) = F(\alpha, \beta) 1_{\{\beta - \alpha \leq c\}}$$

avec $c > 0$ et $F : [-c, 0] \times [0, c] \to [0, \infty[$ une fonction continue telle que

$$\int_0^c F(\beta - c, \beta) d\beta > 0.$$

Alors $K_f = c$.



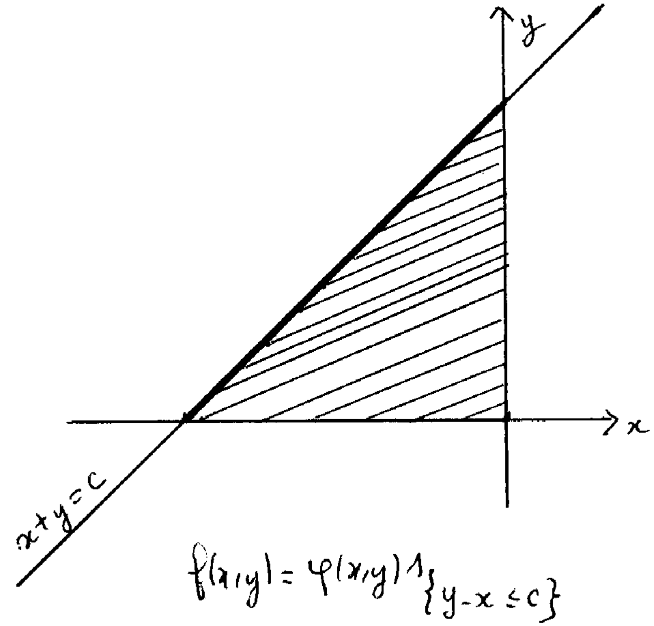


Figure de gauche (cas 1) : $f(\alpha,\beta) = F(\alpha,\beta)1_{\{\alpha\geq\alpha_0,\beta\leq\beta_0\}}$.
Figure de droite (cas 2) : $f(\alpha,\beta) = F(\alpha,\beta)1_{\{\beta-\alpha\leq c\}}$.

Proposition 3

1. *Dans le cas 1* $(f(\alpha,\beta) = F(\alpha,\beta)1_{\{\alpha\geq\alpha_0,\beta\leq\beta_0\}})$, *on a :*

$$E\Big[f(I_t,S_t)\Big] \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{8}{\pi}F(\alpha_0,\beta_0)\sin\Big(\frac{\pi\beta_0}{\beta_0-\alpha_0}\Big)\exp\Big\{-\frac{\pi^2 t}{2(\beta_0-\alpha_0)^2}\Big\}.$$

2. *Dans le cas 2* $(f(\alpha,\beta) = F(\alpha,\beta)1_{\{\beta-\alpha\leq c\}})$ *on a :*

$$E\Big[f(I_t,S_t)\Big] \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{4\pi}{c^2}\Big(\int_0^1 F\big(c(r-1),cr\big)\sin(\pi r)dr\Big)\, t\exp\Big\{-\frac{\pi^2 t}{2c^2}\Big\}.$$

4 Pénalisation avec $F_t = f(I_t, S_t)$

4.1 Étude du cas 1

Théorème 4 *Le principe de pénalisation peut être appliqué :*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E_0\left[f(I_t, S_t)\ |\mathcal{F}_u\right]}{E_0\left[f(I_t, S_t)\right]} = M_u^{\alpha_0,\beta_0}$$

et

$$M_u^{\alpha_0,\beta_0} := N^{\alpha_0,\beta_0}(u \wedge T_{\alpha_0} \wedge T_{\beta_0}), \quad u \geq 0$$

$$N_u^{\alpha_0,\beta_0} := \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi\beta_0}{\beta_0-\alpha_0}\right)} \sin\left(\frac{\pi(\beta_0 - X_u)}{\beta_0 - \alpha_0}\right) \exp\left\{\frac{\pi^2\, u}{2(\beta_0 - \alpha_0)^2}\right\}, \quad u \geq 0$$

et

$$T_x := \inf\{t \geq 0;\ X_t = x\}.$$

Notons : $Q_0^{\alpha_0,\beta_0}(\Lambda_u) := E_0\left[1_{\Lambda_u} M_u^{\alpha_0,\beta_0}\right]$, pour tout $\Lambda_u \in \mathcal{F}_u$.

4.2 Étude du cas 2

Théorème 5 *Le principe de pénalisation peut être appliqué :*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E_0\big[f(I_t, S_t)\ |\mathcal{F}_u\big]}{E_0\big[f(I_t, S_t)\big]} = M_u^{F,c}$$

et

$$M_u^{F,c} := N^{F,c}(u \wedge \theta(c)), \quad t \geq 0$$

$$N_u^{F,c} := \frac{1}{\rho(F)} \int_{(S_u - X_u)/c}^{(I_u - X_u + c)/c} F\big(X_u + c(r-1), X_u + cr\big) \sin(\pi r) dr$$

$$\times \exp\left\{\frac{\pi^2\ u}{2c^2}\right\}$$

$$\theta(c) := \inf\{t \geq 0;\ S_t - I_t = c\}, \quad \rho(F) := \int_0^1 F(\big(c(r-1),\ cr\big)dr.$$

Notons : $Q_0^{F,c}(\Lambda_u) := E_0\big[1_{\Lambda_u} M_u^{F,c}\big]$, pour tout $\Lambda_u \in \mathcal{F}_u$.

5 La loi de (X_t) sous $Q_0^{\alpha_0,\beta_0}$ et $Q_0^{F,c}$

Théorème 6 *Sous* $Q_0^{\alpha_0,\beta_0}$ *:*

1. (X_t) *est un processus de diffusion :*

$$X_t = B_t - \frac{\pi}{\beta_0 - \alpha_0} \int_0^t \cot\left(\frac{\pi(\beta_0 - X_u)}{\beta_0 - \alpha_0}\right) du,$$

   où (B_t) *est un* $Q_0^{\alpha_0,\beta_0}$*-mouvement brownien issu de* 0.

2. *On a :*

$$\alpha_0 < X_t < \beta_0, \quad \forall\, t \geq 0$$

   et

$$I_\infty = \alpha_0, \quad S_\infty = \beta_0.$$

3. X_t *converge en loi,* $t \to \infty$ *vers la probabilité de densité :*

$$p^{\alpha_0,\beta_0}(x) := \frac{2}{\beta_0 - \alpha_0} \sin^2\left(\frac{\pi(\beta_0 - x)}{\beta_0 - \alpha_0}\right) 1_{[\alpha_0,\beta_0]}(x)$$

Remarque On a :

$$\begin{aligned} X_t &= B_t - \frac{\pi}{\beta_0 - \alpha_0} \int_0^t \cot\Big(\frac{\pi(\beta_0 - X_u)}{\beta_0 - \alpha_0}\Big) du \\ &= B_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln \ p^{\alpha_0,\beta_0}\Big)(X_u) du. \end{aligned}$$

Proposition 6 *Dans le cas 2 ($f(\alpha,\beta) = F(\alpha,\beta)1_{\{\beta-\alpha\le c\}}$) on a :*

$$Q_0^{F,c}(\cdot) = \frac{1}{c\rho(F)}\int_0^c F(\beta - c,\beta)\sin\left(\frac{\pi\beta}{c}\right)Q_0^{\beta-c,\beta}(\cdot)d\beta.$$

Corollaire 7 *Sous $Q_0^{F,c}$,*

1. $I_\infty < X_t < S_\infty,\ \forall\, t \ge 0$ *et* $S_\infty - I_\infty = c.$
2. *Lorsque t tend vers ∞, le couple* $\left(\frac{S_t+I_t}{2},\ X_t - \frac{S_t+I_t}{2}\right)$ *converge en loi vers la probabilité à support dans* $[-c/2, c/2] \times [-c/2, c/2]$ *et de densité :*

$$\left[\frac{1}{c\rho(F)}F(x-\frac{c}{2}, x+\frac{c}{2})\cos\left(\frac{\pi x}{c}\right)\right] \times \left[\frac{2}{c}\cos^2\left(\frac{\pi y}{c}\right)\right]$$

Nota : $\dfrac{S_t+I_t}{2}$ est le milieu de l'intervalle $[I_t,\ S_t]$.

6 Retour aux diffusions

Soit μ une mesure de probabilité sur $]-\infty, 0] \times [0, \infty[$ ne chargeant pas $(0,0)$. Soit :

$$Q_0^{\mu}(\cdot) := \int_{]-\infty,0]\times[0,\infty[} Q_0^{\alpha,\beta}(\cdot)\mu(d\alpha, d\beta),$$

la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ où $Q_0^{\alpha,\beta}$ est associée à la pénalisation obtenue dans le cas 1 (i.e. $F_t = 1_{\{I_t \geq \alpha, S_t \leq \beta\}}$)
Notons que si

$$\mu(d\alpha, d\beta) := \frac{1}{c\rho(F)} F(\beta - c, \beta) \sin\left(\frac{\pi\beta}{c}\right) \delta_{\beta-c}(d\alpha)\ 1_{[0,c]}(\beta) d\beta$$

alors

$$Q_0^{F,c} = Q_0^{\mu}$$

Soit μ une mesure de probabilité sur $]-\infty,0]\times[0,\infty[$ ne chargeant pas $(0,0)$

Proposition 8 *Sous Q_0^μ :*

1. *Le processus (I_t, S_t, X_t) est Markovien.*
2. *(I_t, S_t) converge p.s. lorsque $t\to\infty$ vers (I_∞, S_∞) et la loi de (I_∞, S_∞) est μ.*
3. (a) *Le triplet (I_t, S_t, X_t) converge en loi lorsque $t\to\infty$ vers la probabilité λ sur $]-\infty,0]\times[0,\infty[\times\mathbb{R}$:*

$$\lambda(d\alpha, d\beta, dx) := p^{\alpha,\beta}(x)\mu(d\alpha, d\beta)dx$$

$$p^{\alpha,\beta}(x) := \frac{2}{\beta-\alpha}\sin^2\Big(\frac{\pi(\beta-x)}{\beta-\alpha}\Big)1_{[\alpha,\beta]}(x)$$

   (b) *En particulier, (S_t, X_t) converge en loi lorsque $t\to\infty$ vers la probabilité :*

$$\nu(d\beta, dx) := \Big(\int_{-\infty}^{0} p^{\alpha,\beta}(x)\mu(d\alpha, d\beta)\Big)dx$$